# VaR – analýza citlivosti, korekce

František Vávra[1], Pavel Nový[2]

**Abstrakt**

Práce se zabývá rozbory citlivosti některých postupů, zahrnutých pod zkratkou VaR. Analyzuje možný vliv vstupních neurčitostí a neurčitostí v určení pravděpodobnostního modelu.

**Klíčová slova**

Value at risk, riziko, citlivost, neurčitost, korekce pravděpodobnostních modelů.

## 1. Motivace a pojmy

Metodikami souhrnně nazývanými zkratkou VaR dostala oblast hodnocení rizik efektivní prostředek. Jako u všech postupů, které přinesly dané oblasti podnětný impuls k dalšímu rozvoji, objevují se zde některé nekritické přístupy a aplikace. Naším cílem je na některé upozornit. Podstatou VaR je vzájemné přiřazení kvantilu a hodnoty realizující tento kvantil. Existují různé formalizace.
Jednou z možných je [2]:

$$VaR_\alpha = \inf\{\, x \in R_1 : P(X > x) \le 1-\alpha \,\} = \inf\{\, x \in R_1 : F_X(x) \ge \alpha \,\}, \tag{1}$$

kde:

| | |
|---|---|
| $R_1$ | je reálná osa, množina reálných čísel, |
| $\alpha$ | je hladina významnosti, přijatelná pravděpodobnost překročení určené hladiny $VaR_\alpha$, |
| $P(X > x)$ | je pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná $X$, měřící riziko, překročí hodnotu $x$, |
| $F_X(x)$ | je distribuční funkce náhodné proměnné $X$ v bodě $x$. |

Pro jednoduchost a přehlednost se omezíme na klasické kvantilové vyjádření. Dále na „spojité“ náhodné proměnné s ryze rostoucími a spojitými distribučními funkcemi a s existující hustotou. Také se omezíme na jednorozměrné náhodné proměnné měřící riziko. Analyzovat budeme statické úlohy. Používaný formalismus proto bude:

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \quad \text{nebo} \quad F_X(x(\alpha)) = \alpha\,. \tag{2}$$

Z této formulace lze ostatní úlohy za uvedených předpokladů snadno odvodit.

[1] Doc. Ing. František VÁVRA, CSc., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň. vavra@kma.zcu.cz .
[2] Ing. Pavel NOVÝ, Ph.D., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň. novyp@kiv.zcu.cz .

# 2. Předpoklad spolehlivě známé distribuční funkce

## 2.1 Základní přístupy

V užívaných metodikách existují dva základní (elementární) přístupy [1]:

- VaR to Risk
  vstupem je hodnota náhodné proměnné měřící riziko, výstupem je hladina významnosti; řešíme tedy vztah $F_X(x) = \alpha$ vůči $\alpha$, při daném $x$, $[\alpha(x)]$.
- Risk to VaR
  vstupem je hladina významnosti, výstupem je jí odpovídající prahová hodnota náhodné proměnné měřící riziko; řešíme tedy vztah $F_X(x) = \alpha$ vůči $x$, při daném $\alpha$, $[x(\alpha)]$.

## 2.2 Citlivost postupu VaR to Risk

Analýza citlivosti se obvykle zabývá řešením otázky, jak se změní výstup, když se vstup změní „málo". V této konkrétní úloze to znamená:

$$\alpha(x+\Delta) = F_X(x+\Delta) \cong F_X(x) + f_X(x)\Delta = \alpha(x) + f_X(x)\Delta\,, \tag{3}$$

kde:

$f_X(x)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné měřící riziko.

V této elementární úloze je změna hladiny významnosti úměrná hodnotě hustoty v daném bodě. K vysvětlení efektu tohoto výsledku musíme zavést pojem definiční obor náhodné proměnné:

$$D_X = \{\, x : (x \in R_1) \wedge (0 < F_X(x) < 1)\,\}. \tag{4}$$

Protože s metodikou VaR obvykle pracujeme v „krajích" definičního oboru, tj. tam, kde jsou odpovídající pravděpodobnosti (hladiny významnosti) „dost malé" nebo naopak „dost velké", je z pohledu citlivosti a pro tuto úlohu důležité zjistit, jak se v těchto krajích chová hustota. K tomu bude užitečné zavést pojem *podstatný definiční obor*.

Podstatným definičním oborem ($\varepsilon$-řezem) na hladině $\varepsilon$; $\varepsilon > 0$ budeme rozumět množinu:

$$D_X(\varepsilon) = \left\{x : (x \in R_1) \wedge \left(F_X(x) > \varepsilon/2\right) \wedge \left(F_X(x) < 1 - \varepsilon/2\right)\right\}. \tag{5}$$

Je zřejmé, že $D_X(0) = D_X$. $\varepsilon$-řez je vlastně množina hodnot, mezi kterými se s dostatečně velkou pravděpodobností $1-\varepsilon$ vyskytují hodnoty náhodné proměnné měřící riziko. $\varepsilon$-řezy by šlo zavést nesymetricky. Jsou úlohy, kdy je takové zavedení užitečné, ale v tomto textu o tento typ nepůjde.
Diskutovaný postup stanovení hladiny významnosti $\alpha$ nebude citlivý na volbu $x$, pokud bude hodnota hustoty $f_X(x)$ na množině $D_X \div D_X(\varepsilon)$ dostatečně malá pro malé $\varepsilon$. To je např. splněno pro normální-Gaussovo rozdělení a naopak není splněno pro „neposunuté" exponenciální rozdělení v okolí nuly.

## 2.3 Citlivost postupu Risk to VaR

V této konkrétní úloze problém citlivosti znamená:

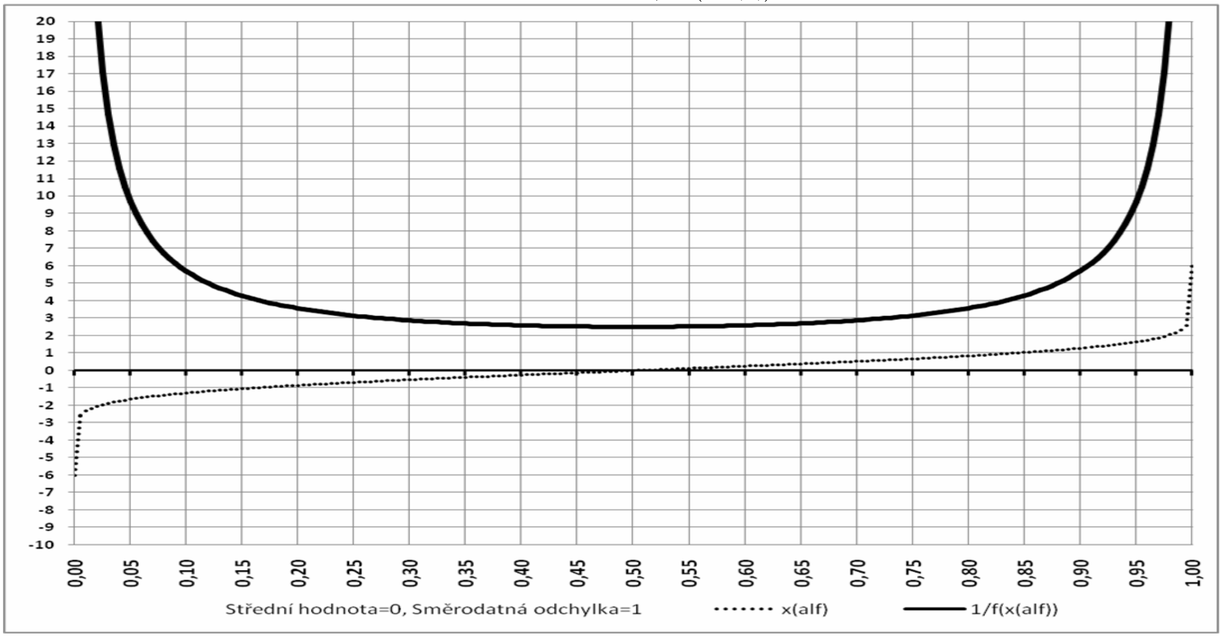
$$x(\alpha+\delta) = F_X^{-1}(\alpha+\delta) \cong F_X^{-1}(\alpha) + \frac{d}{d\alpha}F_X^{-1}(\alpha)\Big|_\alpha \delta = x(\alpha) + \frac{1}{f_X\left(F_X^{-1}(\alpha)\right)}\delta\,, \tag{6}$$

kde:

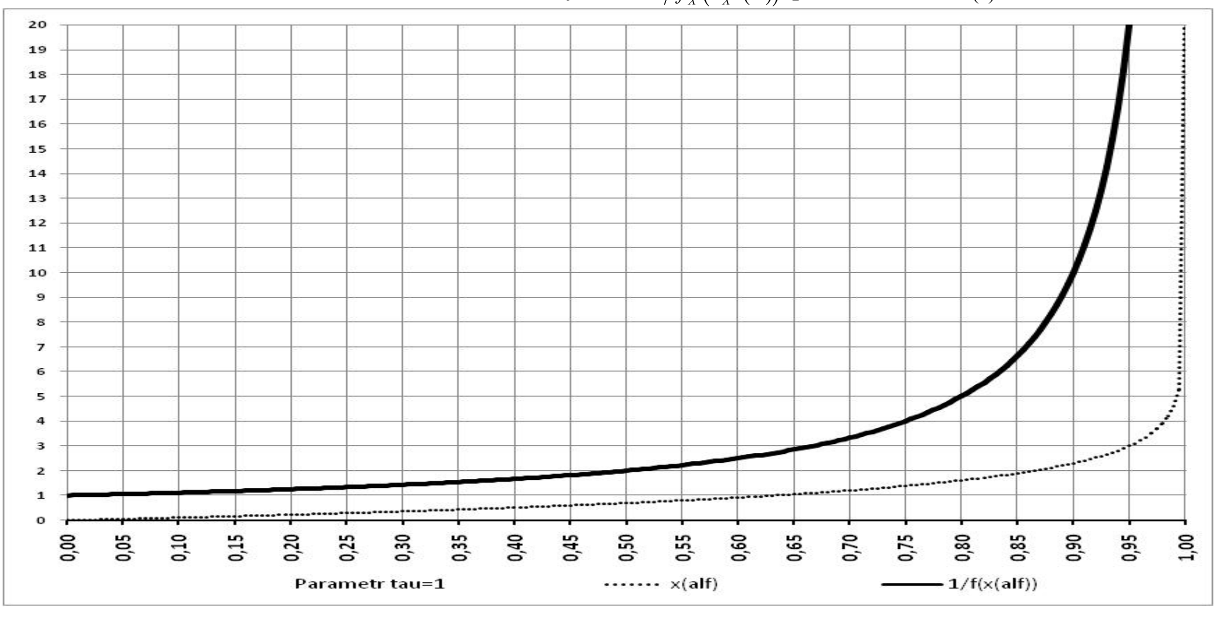
$F_X^{-1}(\alpha)$ je inverzní (kvantilová) funkce k funkci distribuční.

V této elementární úloze je změna hodnoty VaR úměrná součiniteli $1/f_X\left(F_X^{-1}(\alpha)\right)$. To už bude činit v některých i zcela reálných úlohách problémy. To reprezentují následující obrázky, na kterých je zobrazen průběh tohoto součinitele pro normální a exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

*Obrázek č. 1: Hodnota citlivostní funkce* $1/f_X\left(F_X^{-1}(\alpha)\right)$ *pro rozdělení* $N(0,1)$.




*Obrázek č. 2: Hodnota citlivostní funkce* $1/f_X\left(F_X^{-1}(\alpha)\right)$ *pro rozdělení* $E(1)$.



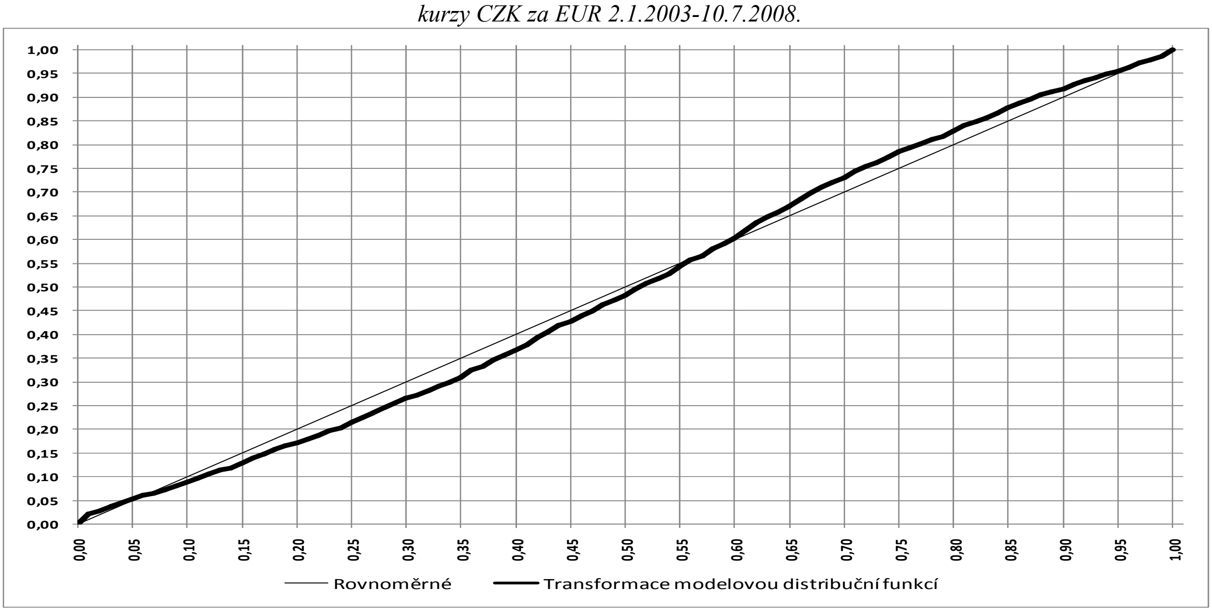

Z obou obrázků je zřejmé, že v této úloze a u uvedených rozdělení je stanovení $x(\alpha)$ velice citlivé na volbu $\alpha$.

# 3. Odhadovaný pravděpodobnostní popis

Předchozí případ, kdy je známý pravděpodobnostní popis, je spíše výjimkou než realitou. Ve skutečnosti je většina předpokládaných úloh svázána s některým typickým modelem (normální rozdělení, exponenciální rozdělení, …). Ten však ne vždy dává i při dobré statistické parametrické inferenci přijatelné výsledky. Proto jsou nutné korekce. Zde prezentovaný případ vychází z prací [3] a [4].
Jedna z možností testu přijatelnosti zvoleného modelu je založena na triviálním tvrzení: Má-li náhodná proměnná $\xi$ rozdělení s distribuční funkcí $F_\xi(x)$, pak má náhodná proměnná $\eta = F_\xi(\xi)$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$.

Toto tvrzení pak může sloužit jako test shody zvoleného modelu s realitou. Testujeme shodu empirické distribuční funkce (EDF) náhodné proměnné $\eta$ s modelovou distribuční funkcí rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$. Metodika takového testování je podložena [5], str. 422-429. Pokud test vede k přijmutí hypotézy shody, nevzniká žádný problém. Situace zamítnutí bude nadále sledována. Reálný příklad je na obrázku č. 3.

*Obrázek č. 3: Příklad empirické distribuční funkce transformovaných hodnot.*
*Jedná se o logaritmus poměru současného a předchozího kurzu, modelová distribuční funkce je normální.*
*Zdroj dat: http://www.ecb.int/stats/exchange/eurofxref/html/index.en.html,*
*kurzy CZK za EUR 2.1.2003-10.7.2008.*




| Údaj | CZK za EUR - lg(k(t)/k(t-1) | Transformace modelovou distribuční funkcí N(průměr, $StD^2$) |
|---|---|---|
| Minimum | -0,015 | 0,000 |
| Průměr | 0,000 | 0,504 |
| Výběrový medián | 0,000 | 0,518 |
| Maximum | 0,013 | 1,000 |
| Odhad StD | 0,003 | 0,273 |
| Počet | 1 415 | 1 415 |

*Tabulka č. 1: Výběrové parametry k distribuční funkci na obrázku č. 3.*

### 3.1 Distorzní korekce

Výše demonstrovaný nedostatek zvoleného modelového popisu lze v některých případech korigovat pomocí pojmu distorze. Ta vychází z jednoduchého tvrzení: Je-li $F(x)$ libovolná distribuční funkce některé náhodné proměnné $F : S \to \langle 0,1 \rangle$, $S \subset R_1$ a $G(x)$ je distribuční funkce $G : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$, pak složená funkce $G(F(x))$ je také distribuční funkcí $F \circ G : S \to \langle 0,1 \rangle$. $G(x)$ bývá nazývána korekční distribucí nebo distorzí. Pro detaily odkazujeme na naše práce [3] a [4]. V literatuře lze nalézt mnoho distorzí, použitelných pro různé situace, např.:

- $G(x) = x^a ; a > 0$ … mocninná distorze,
- $G(x) = \Phi\left(\Phi^{-1}(x) + \lambda\right); \lambda \in R_1 ; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz ; \Phi^{-1}(x)$ … inverze mocninné distorze, tzv. Wangova distorze (Wangova transformace),
- $G(x) = (1 + \lambda)x - \lambda x^2 ; \lambda \in \langle -1,1 \rangle$ … Giniho distorze (Giniho transformace),
- …,
- $G(x) = B(x;\alpha,\beta) == \frac{\int_0^x z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz}{B(\alpha,\beta)} ; \alpha,\beta > 0$ … Beta distorze.

V této práci bude pro korekce modelových popisů využita Beta distorze (Beta distribuce, Beta rozdělení), pro svou poměrně širokou flexibilitu.

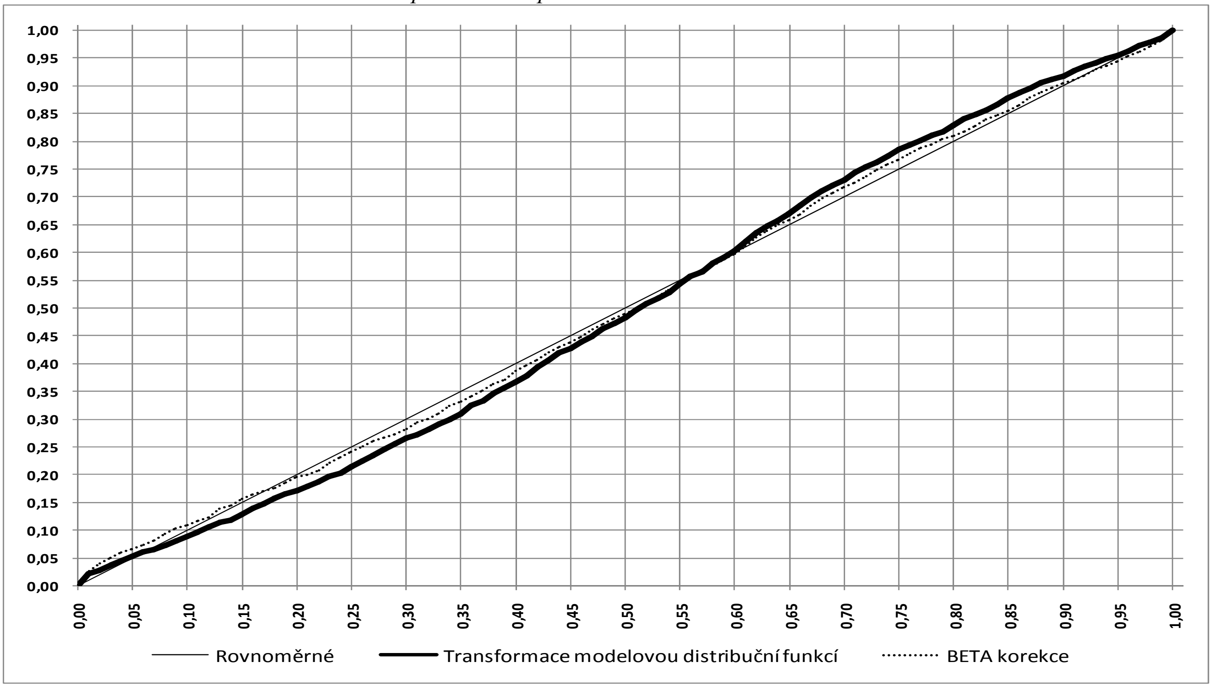
### 3.2 Využití Beta distorze

Mějme náhodný výběr $(x_1, x_2, ..., x_n)$ z náhodné proměnné $\xi$. O něm budeme předpokládat, že se jednotlivá pozorování řídí distribuční funkcí $F_\xi(x)$.

- Náhodný výběr transformujeme modelovou distribuční funkcí $F_\xi(x)$, $y_i = F_\xi(x_i); i = 1,...,n$. Výběr $(y_1, y_2, ..., y_n)$ otestujeme na „rovnoměrnost“. Pokud lze přijmout hypotézu rovnoměrného rozdělení, pak je $F_\xi(x)$ přijatelným modelem pro další práci (např. VaR analýzu). Pokud ne, pokračujeme dalším krokem.
- Stanovíme základní statistické parametry: $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$; $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$. Z nich „momentovou metodou“ odhadneme parametry Beta rozdělení $\alpha = \overline{y}\left(\frac{\overline{y}(1-\overline{y})}{s^2} - 1\right)$, $\beta = (1-\overline{y})\left(\frac{\overline{y}(1-\overline{y})}{s^2} - 1\right)$.
- Výběr $(y_1, y_2, ..., y_n)$ transformujeme $z_i = B(y_i;\alpha,\beta)$. Transformovaný otestujeme na rovnoměrnost.

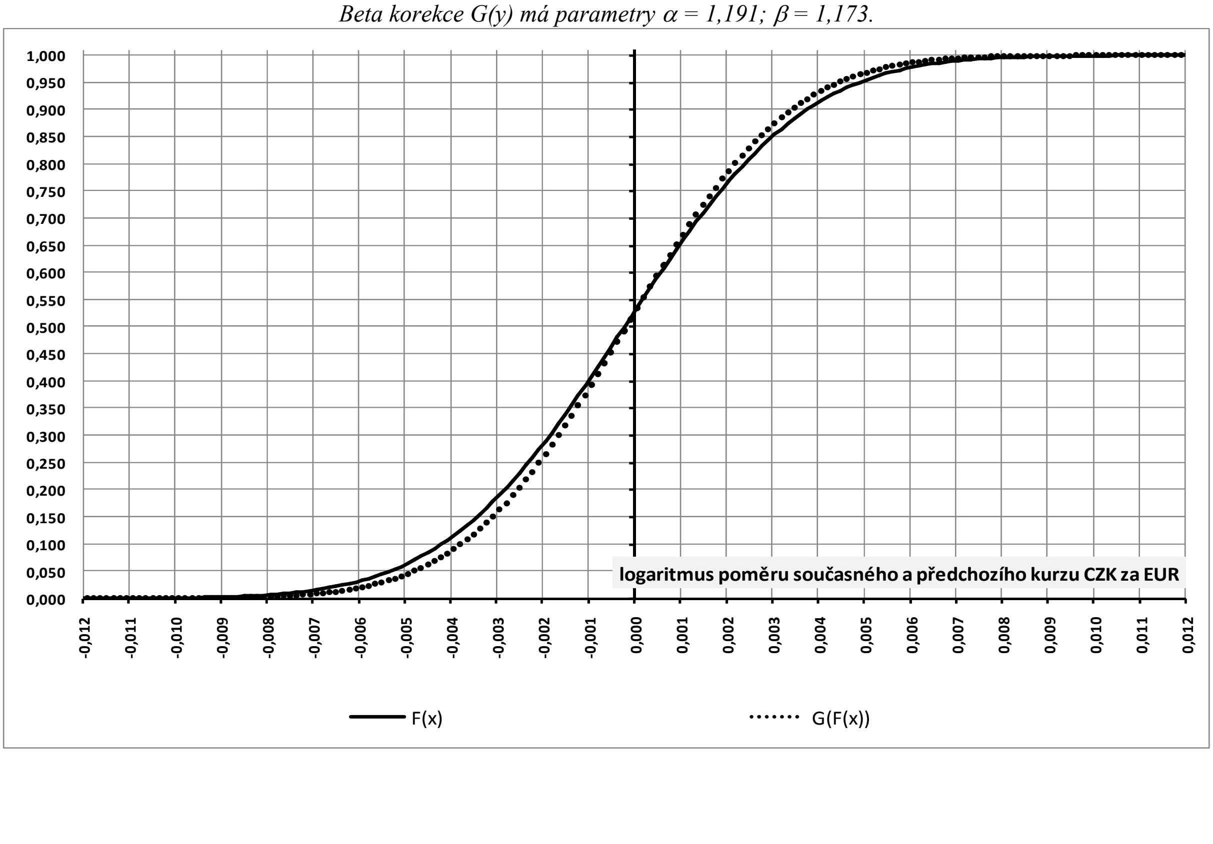
Na obrázku č. 4 je příklad, jak dopadne korekce beta distorzí.

*Obrázek č. 4: Příklad změny distribuční funkce transformované náhodné proměnné po korekci beta-distorzí.*
*Jedná se o pokračování příkladu zobrazeného na obrázku č. 3.*




Následuje obrázek kompletních distribučních funkcí nad původní osou.

*Obrázek č. 5: Modelová a korigovaná distribuční funkce.*
*Navazuje na předchozí obrázek č. 4.*
*Modelová distribuční funkce je normální s parametry uvedenými v tabulce č. 1.*
*Beta korekce G(y) má parametry $\alpha$ = 1,191; $\beta$ = 1,173.*



### 3.3 Měření „ne-kvality“ modelů

Pojetí distorze lze použít i pro „měření kvality“ použitých modelů. Použijeme následující označení:

$F_e(x)$ je empirická distribuční funkce daného náhodného výběru,

$F_m(x)$ je modelová distribuční funkce dle zvoleného pravděpodobnostního modelu,

$G(y)$ je distorze popisující „odchýlení“ modelu a odhadnuté skutečnosti,

$x_1, x_2, ...., x_n$ je zpracovávaný náhodný výběr,

$y_1, y_2, ...., y_n$ je náhodný výběr transformovaný modelovou distribuční funkcí

$y_i = F_m(x_i); i = 1, ..., n$.

Pro vztah mezi empirickou a modelovou distribuční funkcí můžeme předpokládat následující vztah:

$$F_e(x) = G(F_m(x)) . \tag{7}$$

Vzhledem k uvedeným předpokladům existuje k modelové distribuční funkci její inverze $F_m^{-1}(y)$. Proto můžeme použít substituci $y = F_m(x) \quad \Rightarrow \quad x = F_m^{-1}(y)$. Jejím dosazením do vztahu (7) dostáváme vztah pro vyjádření distorze:

$$G(y) = F_e(F_m^{-1}(y)); y \in (0,1). \tag{8}$$

„Vzdáleností“ distorze od identity na $(0,1)$ můžeme pak poměřovat kvalitu či nekvalitu použitého modelu. Takové měření či test by měl být součástí každé VaR studie. Vztah (8) sám o sobě není dokonalý, jsou zapotřebí jeho statistické vlastnosti. Jejich rozbor, přes svou velkou zajímavost, však podstatně překračuje rozsah a určení této práce.

## Summary

**VaR – sensitivity analysis and correction**

Some sensitivity analyses VaR methodology are presented. Uncertainty and probability model uncertainty are analyzed. Correction procedures and some way to measuring imperfection are proposed too.

## Literatura

[1] VOJTÍŠKOVÁ, M.: *Models and methods for measuring the financial risk*. Disertační práce, ZČU – FAV Plzeň, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Plzeň, 2007.

[2] MORGAN, J. P. and REUTERS: *RiskMetrics™ – Technical Document*. Fourth Edition, 1996. New York. December 17, 1996.

[3] VÁVRA, F., NOVÝ, P., MAŠKOVÁ, H., NETRVALOVÁ, A.: *Distortion of probability models*. 4th International Conference APLIMAT 2005, Slovak University of Technology, Bratislava, 2005.

[4] VÁVRA, F., NOVÝ, P., NETRVALOVÁ, A., NEUMANOVÁ, M., VOKÁČOVÁ, K.: *Transformation and probability models*. 5th International Conference APLIMAT 2006, Slovak University of Technology, Bratislava, 2006.

[5] RÉNYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. ACADEMIA, Praha, 1972.