

# Fuzzy systémy, fuzzy logika

21. listopadu 2023

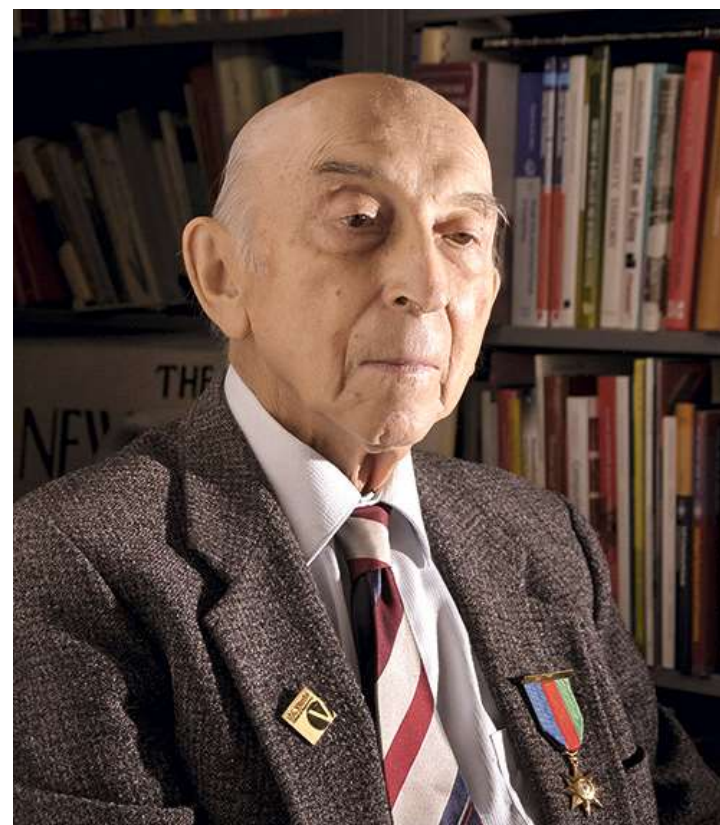
### Fuzzy logika

- Fuzzy logika je přístup k uvažování o fuzzy množinách
- Je základem pro **fuzzy znalostní systémy**
- V booleovské teorii množin se pracuje pouze se 2 hodnotami (0 nebo 1)
- Prvky fuzzy množin mohou nabývat **reálné hodnoty z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$**  (jedná se o tzv. **stupeň příslušnosti**) => klasické množiny jsou speciálním případem fuzzy množin
- Fuzzy logika je **system na bázi pravidel**, který se může opírat o **praktickou zkušenost operátora**, což je zvláště užitečné pro **zaznamenání znalostí zkušeného operátora**.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

- Fuzzy logiku zavedl **Lotfi Aliasker Zadeh**, profesor na University of California at Berkeley (4. 2. 1921 Baku – 6. 9. 2017 Berkeley)



### Speciální funkce fuzzy logiky

- Funkce příslušnosti:

$$\mu_A(x): X \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$$

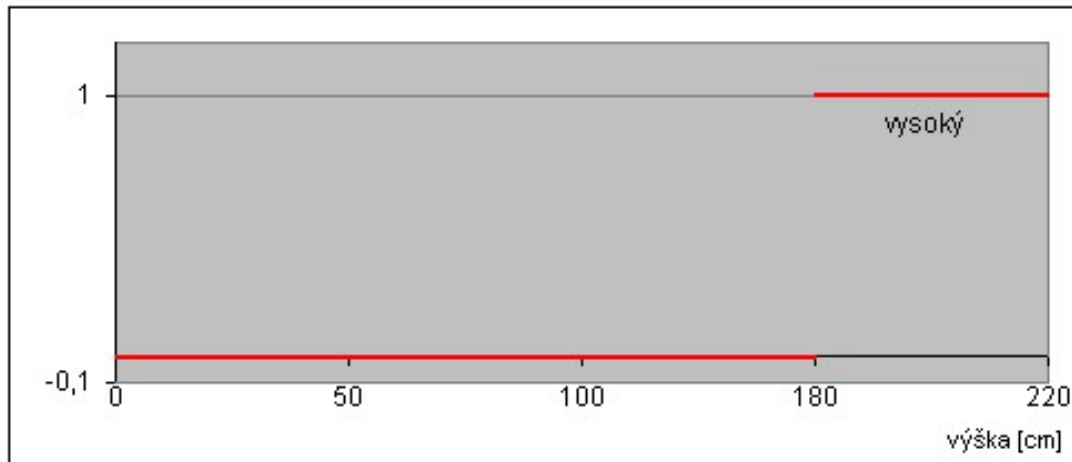
- Stupeň příslušnosti:
  - 0 – absolutní nepřislušnost
  - 1 – absolutní příslušnost

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

**Příklad:** Tvrzení: Petr je vysoký.

Definujeme funkci, která podle výšky člověka určí, jestli je člověk vysoký nebo ne.

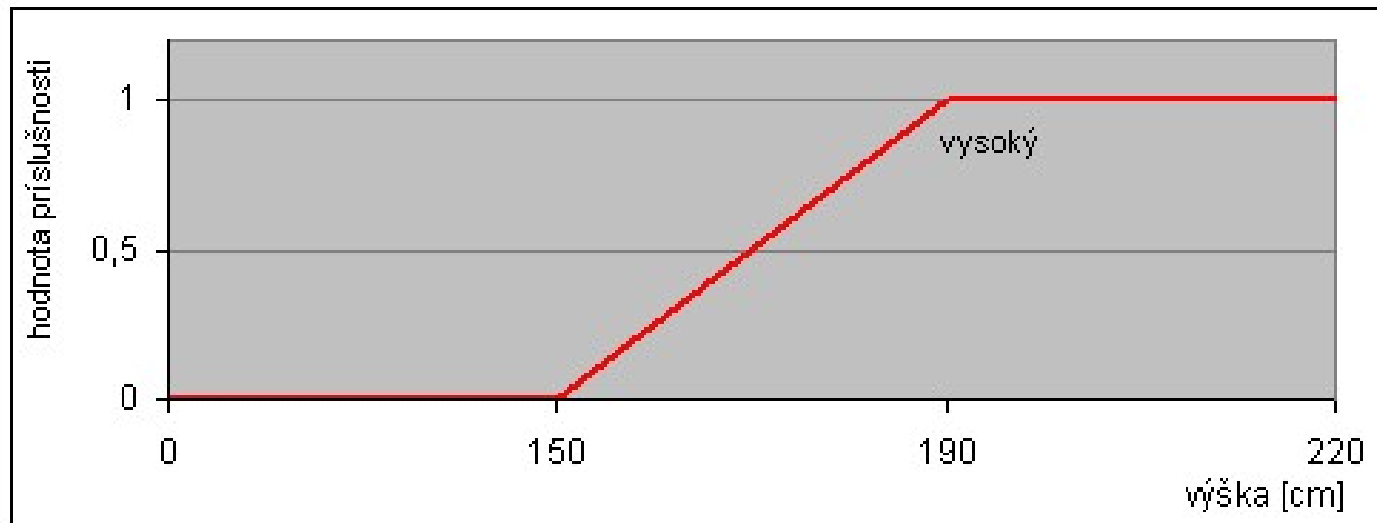
„X je vysoký“  $\begin{cases} = 1 & \text{pokud } \text{výška}(X) \geq 180 \text{ cm} \\ = 0 & \text{pokud } \text{výška}(X) < 180 \text{ cm} \end{cases}$



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

Ve fuzzy logice definujeme funkci příslušnosti a s její pomocí můžeme tvrzení přiřadit libovolnou hodnotu z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  – např.:

„X je vysoký“  $\begin{cases} = 1 & \text{pokud výška}(X) \geq 190 \text{ cm} \\ = (1/40 * (\text{výška}(X) - 150)) & \text{pokud } 150 < \text{výška}(X) < 190 \\ = 0 & \text{pokud výška}(X) < 150 \text{ cm} \end{cases}$



### Fuzzy množina

- Jde o množinu prvků, které jsou **výstupy funkce příslušnosti**  $\mu_A(x)$  (vůči množině  $A$ ) a určují, nakolik prvek do množiny přísluší
- Obecný zápis fuzzy množiny:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ kde } a_i = \mu_A(x_i)$$

- Prvky, pro které platí  $\mu_A(x) > 0$ , jsou tzv. **podpory** množiny
- Prvky, pro které platí  $\mu_A(x) > \alpha$  (kde  $\alpha$  je zvolená konstanta), tvoří tzv.  **$\alpha$ -řez** množiny
- Prvky, kde  $\mu_A(x) = 1$ , vytvářejí tzv. **jádro**

### Operace s fuzzy množinami

Pro fuzzy množiny **neplatí** zákon vyloučení třetího a zákon protikladu.

#### Možné operace:

Průnik, sjednocení, doplněk, podmnožina, fuzzy negace, rovnost, inkluze, normalizace, koncentrace, dilatace, intenzifikace...

Kartézský součin fuzzy množin je tzv. **fuzzy relace**.



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Operace:

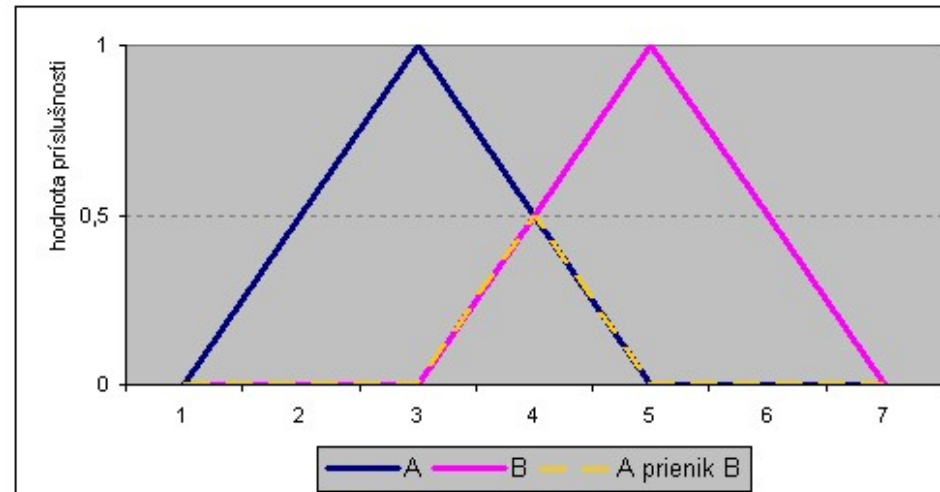
#### 1. Průnik (AND)

V klasických množinách: Prvky, které jsou v obou množinách zároveň

Ve fuzzy množinách: Jaká část prvku je v obou množinách zároveň ?

$$m_{A\_průnik\_B}(p) = \min \{m_A(p), m_B(p)\},$$

$m_X(p)$  je funkce příslušnosti prvku  $p$  k množině  $X$



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

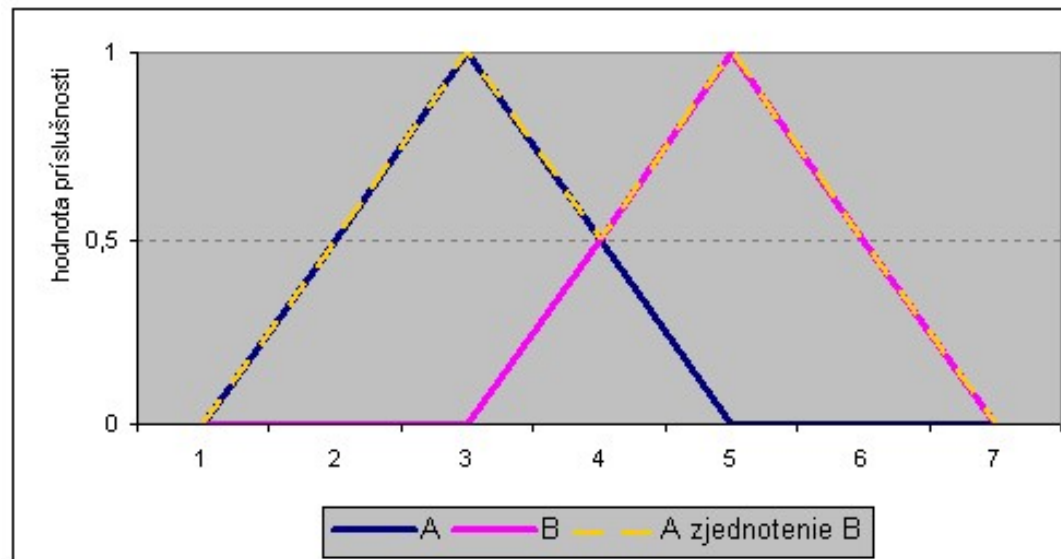
### 2. Sjednocení (OR)

V klasických množinách: Které prvky jsou v jedné nebo druhé množině

Ve fuzzy množinách: Jaká část prvků je v jedné nebo druhé množině ?

$$m_{A\_sjednocení\_B}(p) = \max \{m_A(p), m_B(p)\},$$

$m_X(p)$  je funkce příslušnosti prvku  $p$  k množině  $X$



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

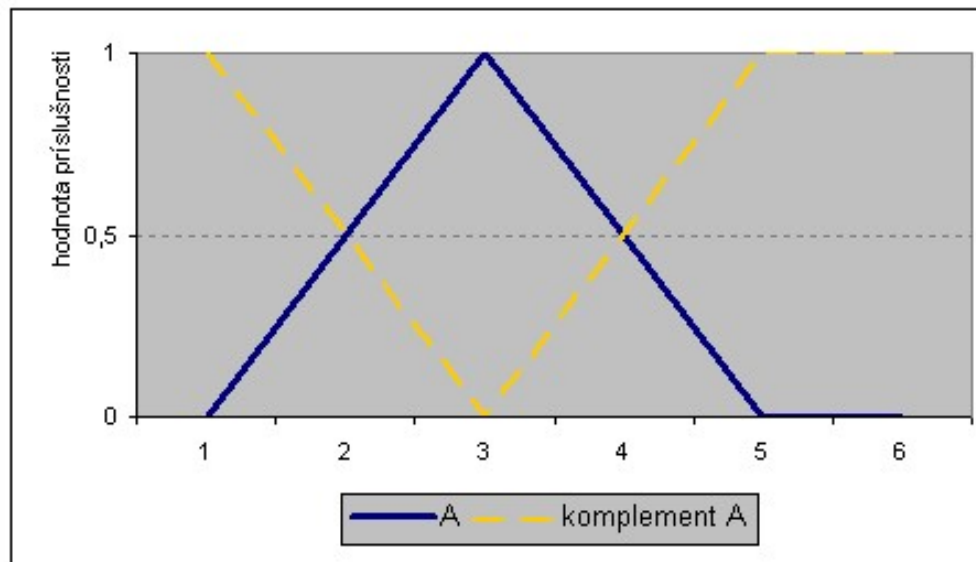
### 3. Doplněk (komplement) (NOT)

V klasických množinách: Které prvky nejsou v množině ?

Ve fuzzy množinách: Jaká část prvků není v množině ?

$$m_{\text{komplement}_A}(p) = 1 - m_A(p),$$

$m_A(p)$  je funkce příslušnosti prvku  $p$  k množině  $A$



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### 4. Podmnožina

V klasických množinách: B je podmnožinou A, pokud všechny prvky, které patří do B, patří zároveň do množiny A

Ve fuzzy množinách: B je podmnožinou A, pokud pro všechny prvky  $p$  platí  $m_B(p) \leq m_A(p)$ ,  $m_A(p)$  a  $m_B(p)$  jsou funkce příslušnosti prvku  $p$  k množině A, resp. k množině B

atd.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

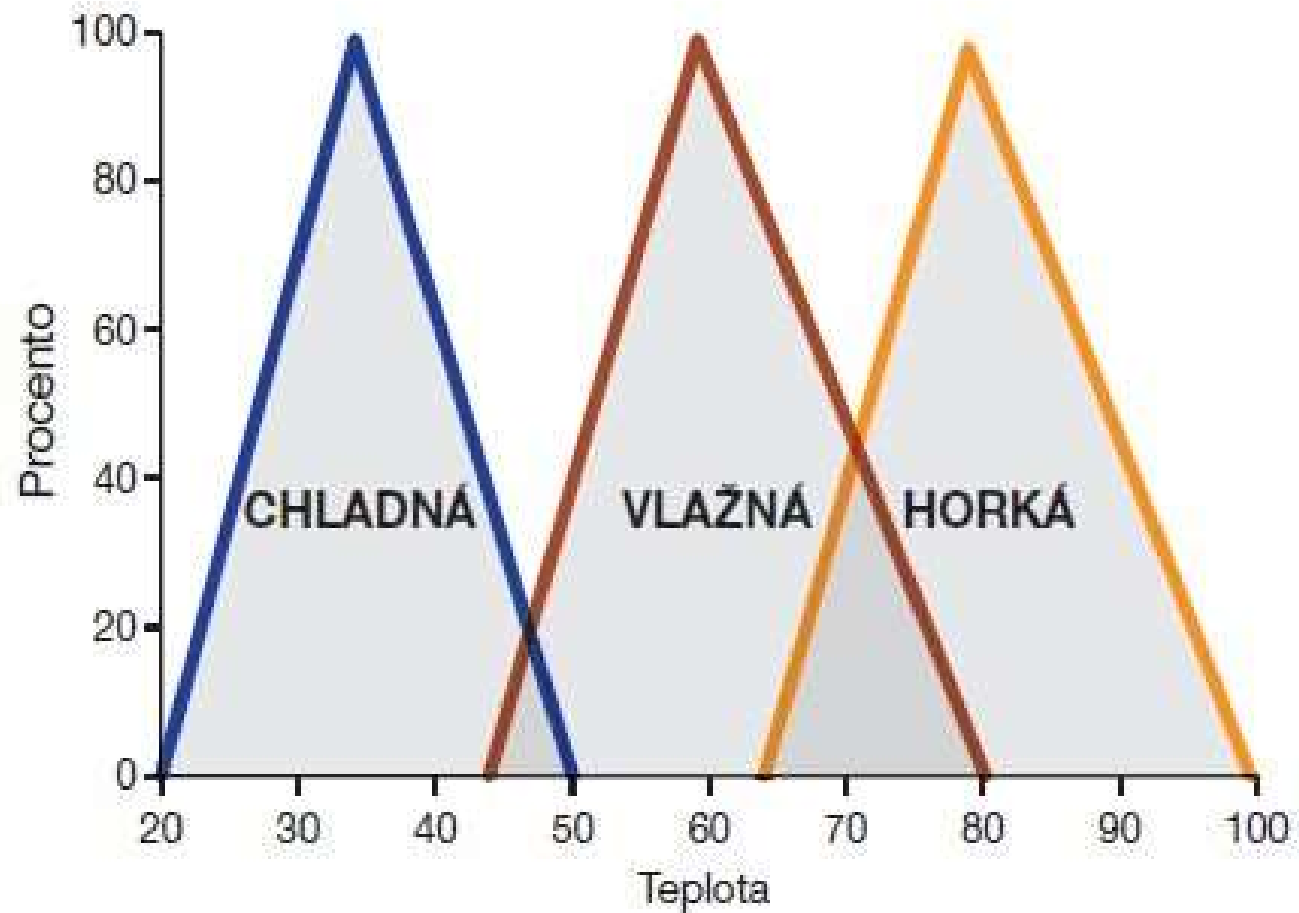
---

### **Příklad** (fuzzy logika):

Návrh systému fuzzy logiky začíná návrhem souboru funkcí příslušnosti pro každý vstup a souboru funkcí pro každý výstup. Soubor pravidel je pak uplatňován na funkce příslušnosti pro získání „přesné“ výstupní hodnoty. V našem případě půjde o závislost obrátek (rychlosti) ventilátoru na teplotě prostředí. Bude proto **TEPLOTA** vstupem fuzzy systému a **RYCHLOST VENTILÁTORU** jeho výstupem. Vytvoříme soubor funkcí příslušnosti pro každý vstup, které budou jednoduchým grafickým znázorněním množin fuzzy proměnné. K tomu použijeme tři fuzzy množiny: **CHLADNÁ**, **VLAŽNÁ** a **HORKÁ** (reprezentují teplotu). Následně vytvoříme funkci příslušnosti pro každou z těchto tří množin teplot, jak ukazuje graf chladná-vlažná-horká na obrázku dále.

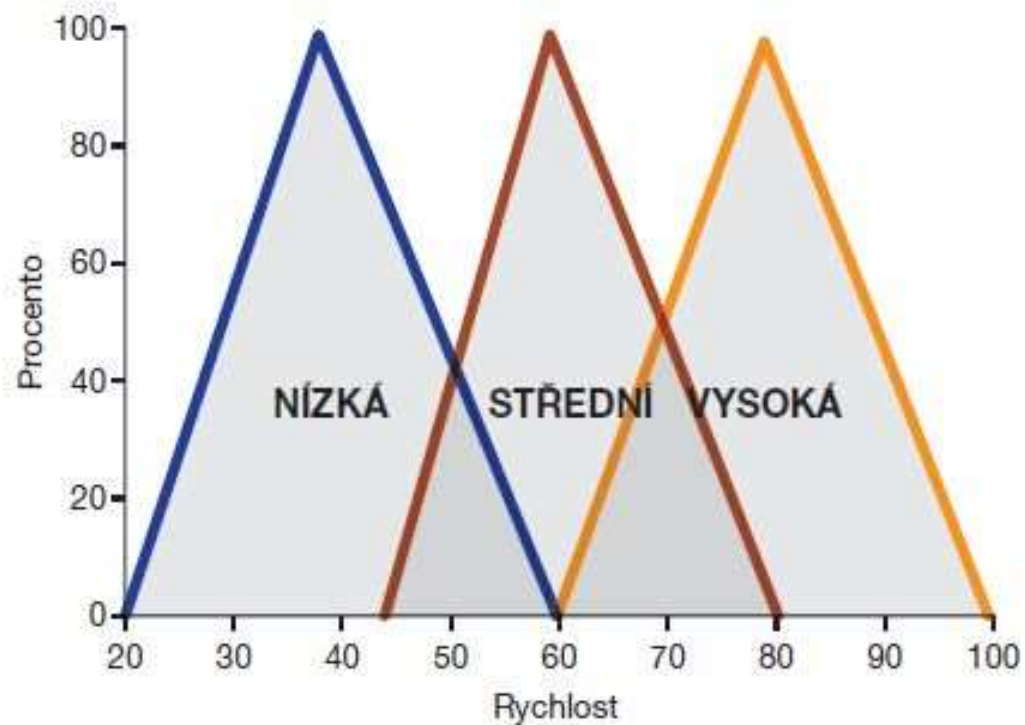
## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

Dále použijeme tři fuzzy množiny pro výstup: **NÍZKÁ**, **STŘEDNÍ** a **VYSOKÁ** (rychlost otáčení ventilátoru):



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

Pro každou výstupní množinu nyní máme vytvořen soubor funkcí, stejně jako pro vstupní množiny. Tvar funkce příslušnosti nemusí být trojúhelníkový, jako jsme použili; lze použít různé tvary, jako je lichoběžník, Gaussova křivka, tvar S nebo uživatelsky definovaný tvar. Změnou tvaru funkce příslušnosti může uživatel vyladit systém pro poskytování optimální reakce.

Když máme definovány funkce příslušnosti, můžeme vytvořit pravidla, která budou vymezovat, jak budou funkce příslušnosti uplatněny na konečný systém. Proto vytvoříme tři pravidla:

- jestliže **HORKÁ** (vysoká teplota), pak **VYSOKÁ** (rychlost)
- jestliže **VLAŽNÁ** (střední teplota), pak **STŘEDNÍ** (otáčky)
- jestliže **CHLADNÁ** (nízká teplota), pak **NÍZKÁ** (rychlost)



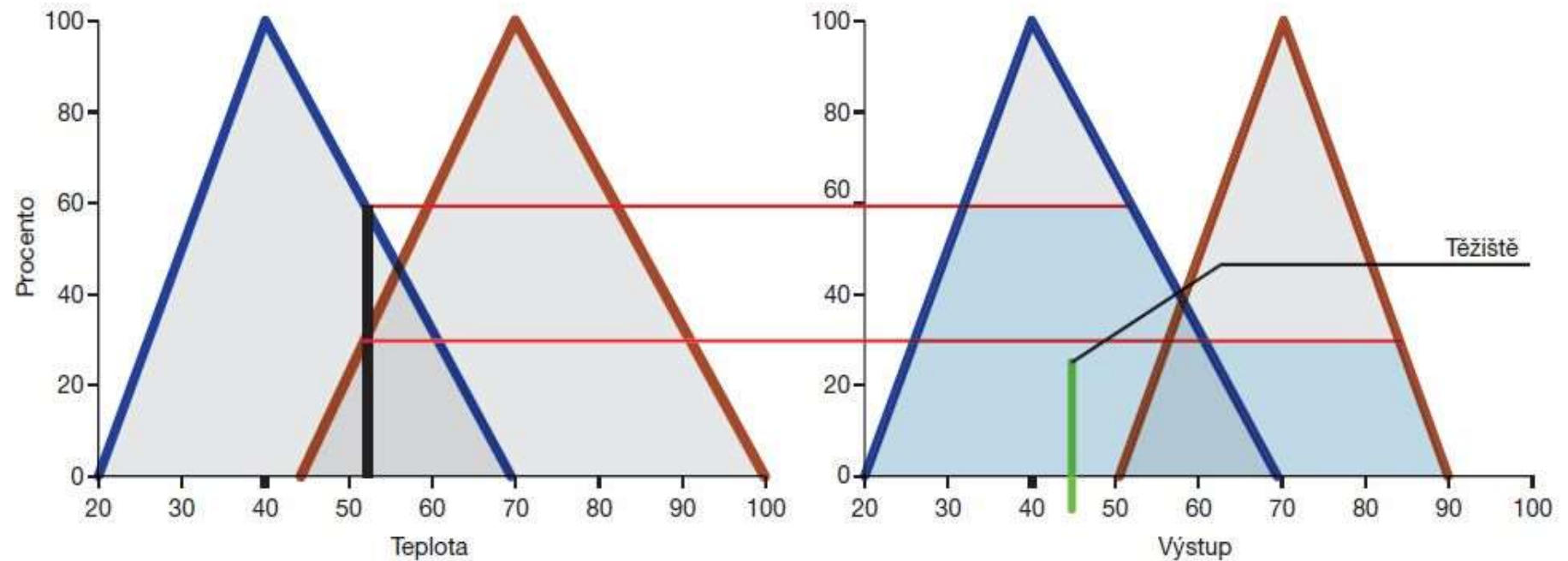
## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

Pravidla uplatníme na funkce příslušnosti pro získání „přesné“ výstupní hodnoty pro řízení systému. Pro zjednodušení předvedeme použití pouze dvou vstupních a dvou výstupních funkcí. Na vstupní hodnotě 52 °C provedeme řez funkcemi příslušnosti – viz následující obrázek. Vidíme, že v tomto příkladu bude řez protínat obě funkce, a proto jsou uplatňována dvě pravidla. Body průniku řezu vyneseme do grafu výstupních funkcí pro získání průsečíku. Výstupní funkce následně ořízneme ve výšce průsečíků. Plochy pod křivkami každé funkce příslušnosti pak sečteme pro získání celkové plochy. Vypočteme těžiště této plochy a výstupní hodnotu nazveme hodnotou těžiště. V tomto příkladu je 44 % výstupní hodnotou proměnné RYCHLOST VENTILÁTORU – viz obrázek dále.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

Řez funkcemi příslušnosti:



RYCHLOST VENTILÁTORU

### Fuzzy znalostní systém

Fuzzy systémy jsou zpravidla pravidlové systémy, které využívají fuzzy logiku v podmínkách a akcích pravidel. Pravidla jsou obvykle ve tvaru **jestliže** X je A **pak** Y je B, kde X, Y jsou lingvistické proměnné a A, B jsou lingvistické hodnoty.

Např.: **jestliže** vítr je silný **pak** rychlost\_plachetnice je velká

**jestliže** vítr je slabý **pak** rychlost\_plachetnice je malá

Poznámka: V podmínkách a také v akcích se mohou použít také kombinace lingvistických výrazů, např.:

**jestliže** teplota je nízká a vlhkost je vysoká **pak** prší

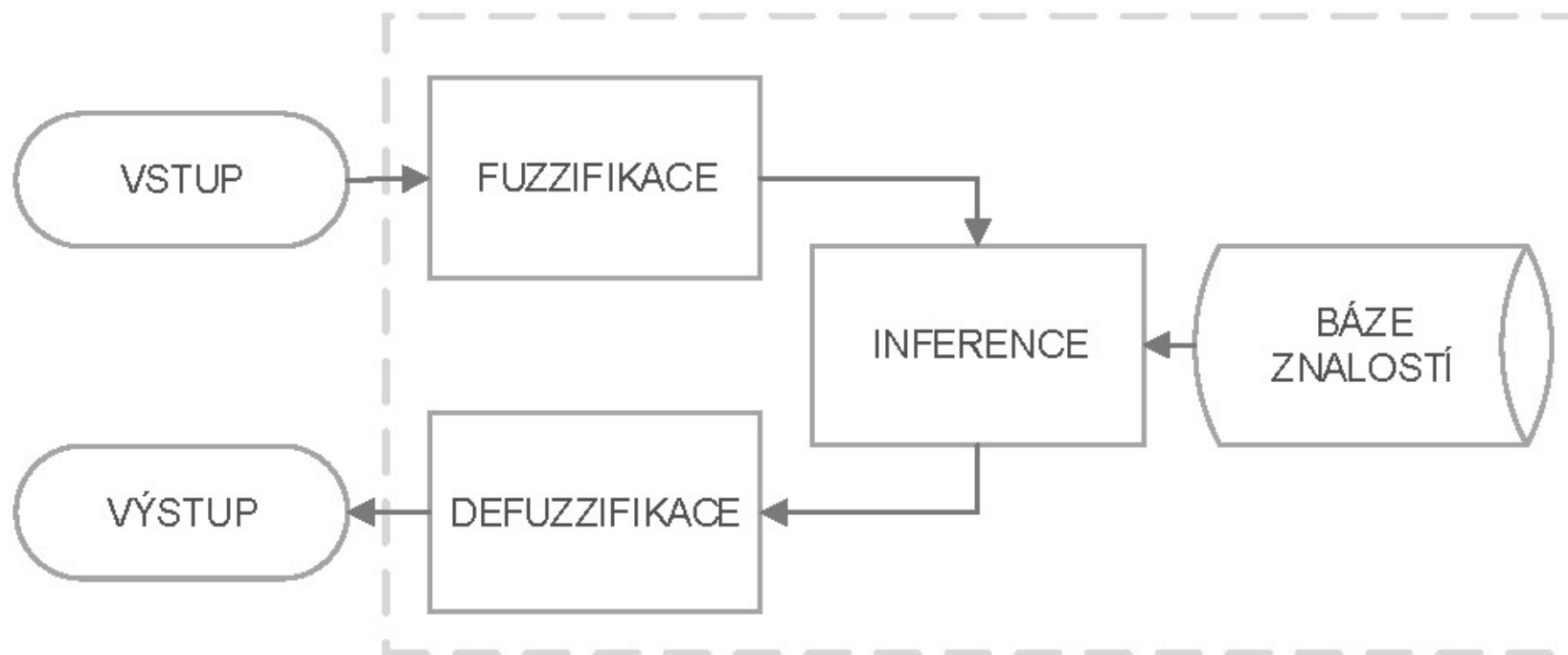
**jestliže** teplota je velmi\_nízká a vlhkost vysoká **pak** sněží

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

Ve fuzzy logice podmínkové části pravidel mohou být pravdivé jen částečně (tj. hodnota příslušnosti  $< 1$ ). V takovém případě také akce budou pravdivé jen částečně (tj. budou mít hodnotu příslušnosti  $< 1$ ). Zpravidla to řešíme tak, že nakolik je pravdivá podmínka, přesně tak bude pravdivá i akce. V případě složených výrazů v podmínkové části pravidla se hodnota podmínky vyčíslí pomocí vztahů pro logické spojky.

# Struktura fuzzy znalostního systému

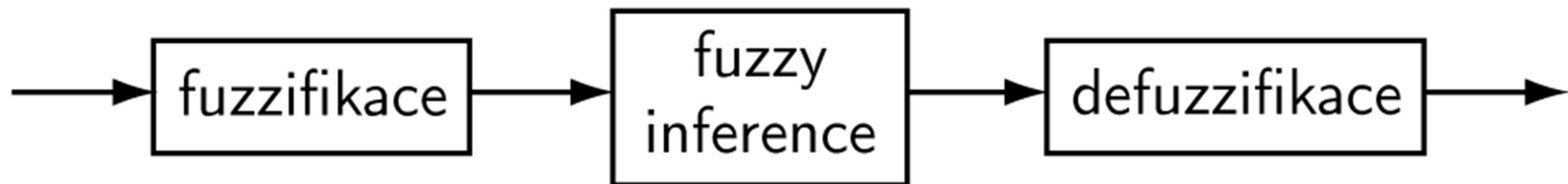


### Fuzzifikace

Převod vstupů do fuzzy množin(y) probíhá ve 2 krocích:

- 1) normalizace univerza na interval  $\langle 0; 1 \rangle$
- 2) přiřazení stupňů příslušnosti k daným fuzzy množinám  
(fuzzy množinami musí být pokryté celé univerzum)

Provádí se fuzzy inferencí – viz dále



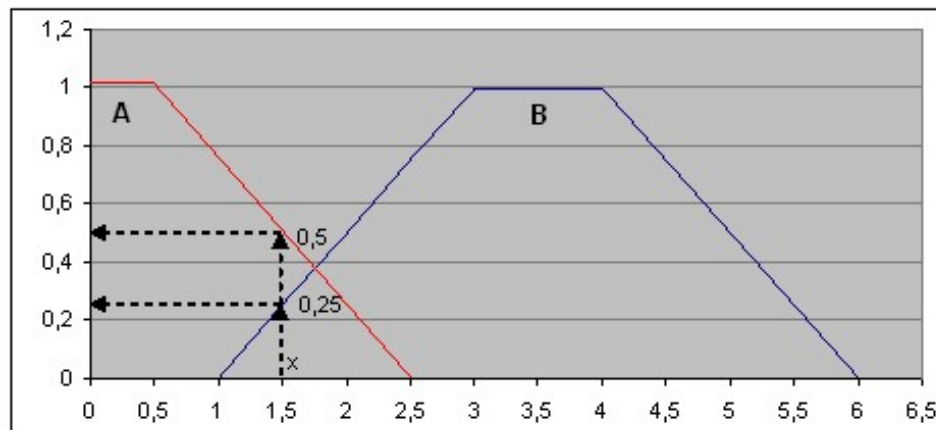
## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Inference ve fuzzy znalostním systému

Inferenční modul ve fuzzy znalostním systému cyklicky vykonává čtyři kroky:

#### 1. Fuzzifikace vstupních hodnot

Naměřené nebo uživatelem zadané hodnoty veličin se pomocí funkce příslušnosti převedou na hodnoty příslušnosti pro jednotlivé fuzzy množiny.



X nechť je objekt, jehož vlastnost  $x$  byla odměřena,  $x = 1,5$ , A, B jsou fuzzy množiny –  $m_A(X) = 0,5$ ,  
 $m_B(X) = 0,25$

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### 2. Vyhodnocení pravidel

Pro všechna aktivovaná pravidla se vypočítají hodnoty příslušnosti částí akcí pravidla.

### 3. Agregace výstupů aktivovaných pravidel

Hodnoty výstupů všech aktivovaných pravidel pro každou lingvistickou proměnnou se sjednotí do jedné fuzzy množiny.

### 4. Defuzzifikace výstupu

Z výsledné fuzzy množiny lingvistické proměnné získáme hodnotu výstupní proměnné.

Na následujících stránkách jsou popsány dvě metody inference. Obě mají první krok stejný, ale v dalších krocích se liší.



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

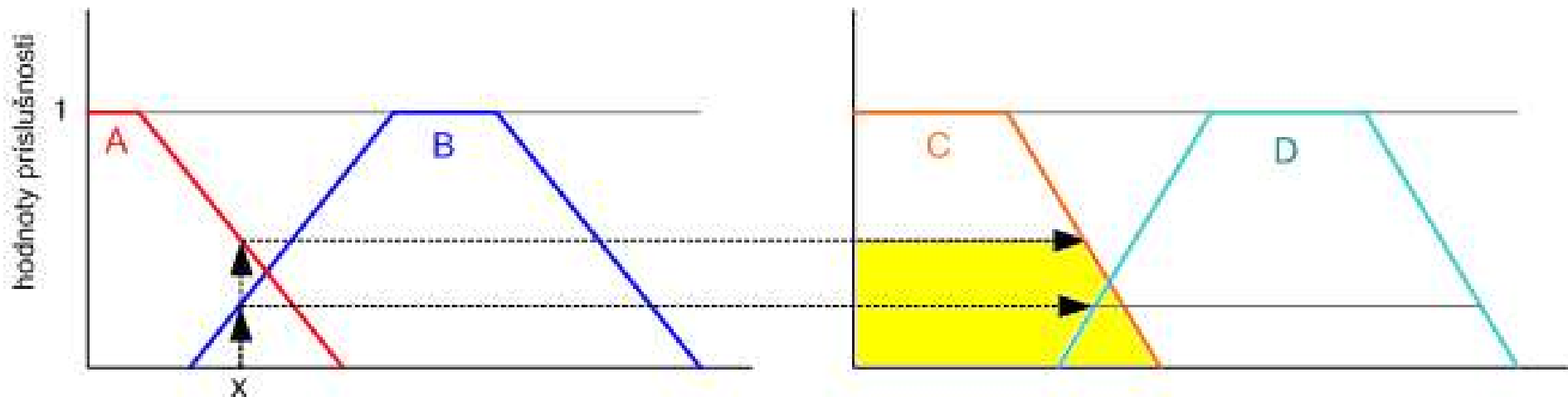
### Mamdaniho inferenční metoda

Mamdaniho metoda využívá ořezávání výstupní funkce příslušnosti na hodnotě příslušnosti vstupu. Pokud máme pravidla ve tvaru

**jestliže**  $X$  je  $A$  **pak**  $Y$  je  $C$  a

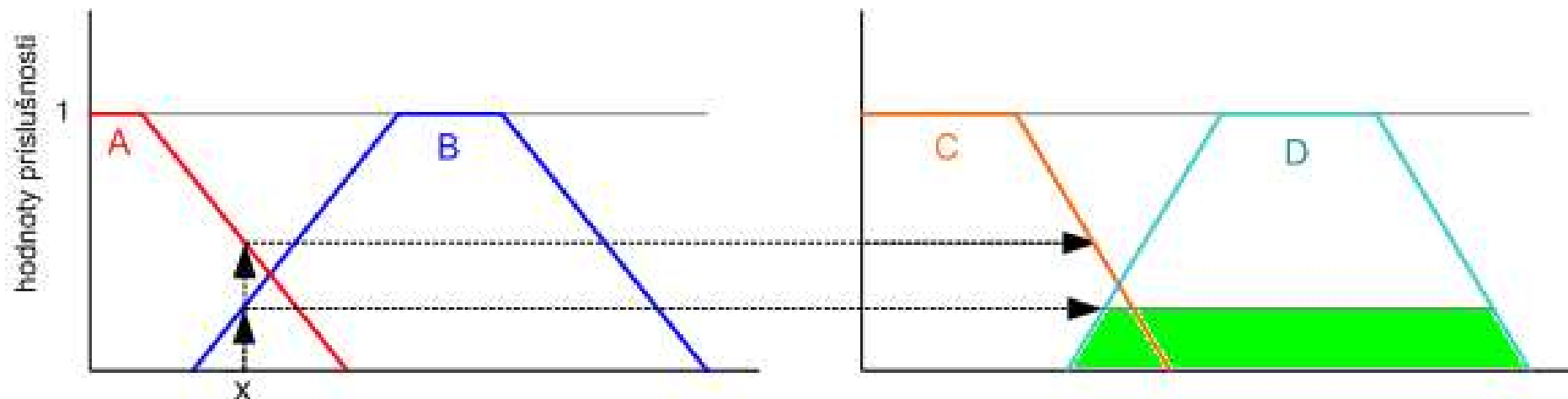
**jestliže**  $X$  je  $B$  **pak  $Y$  je  $D$  ,**

potom vyhodnocení prvního pravidla pro  $X$  je  $A$  (0,5) a  $Y$  je  $C$  (0,5) je:



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

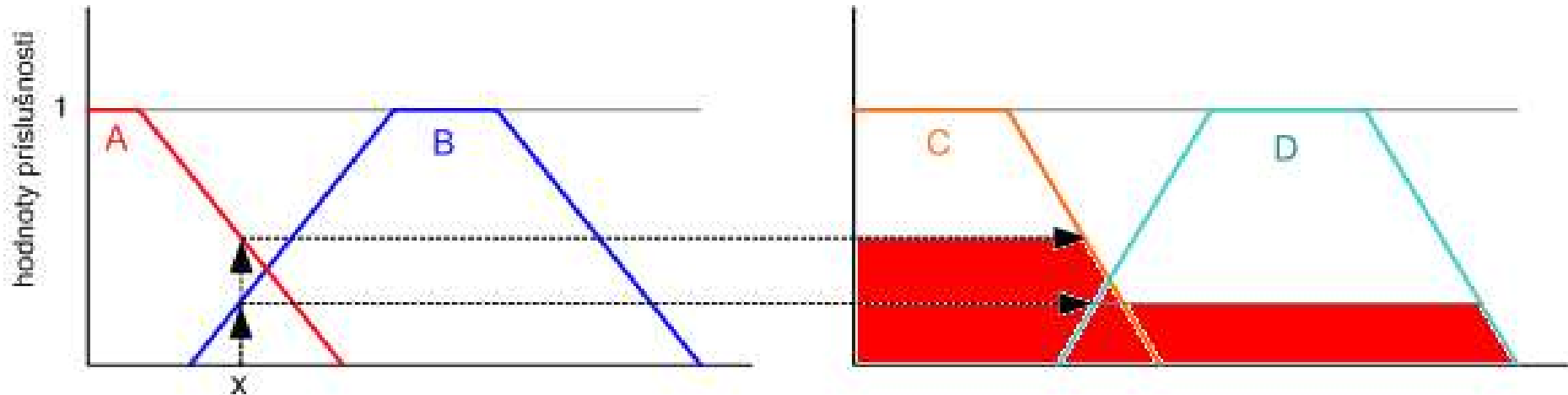
a vyhodnocení druhého pravidla pro  $X$  je B (0,25) a  $Y$  je D (0,25) je:



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Agregace výstupů aktivovaných pravidel

Ořezané funkce příslušnosti z výstupů jednotlivých pravidel se sjednotí do jedné fuzzy množiny:

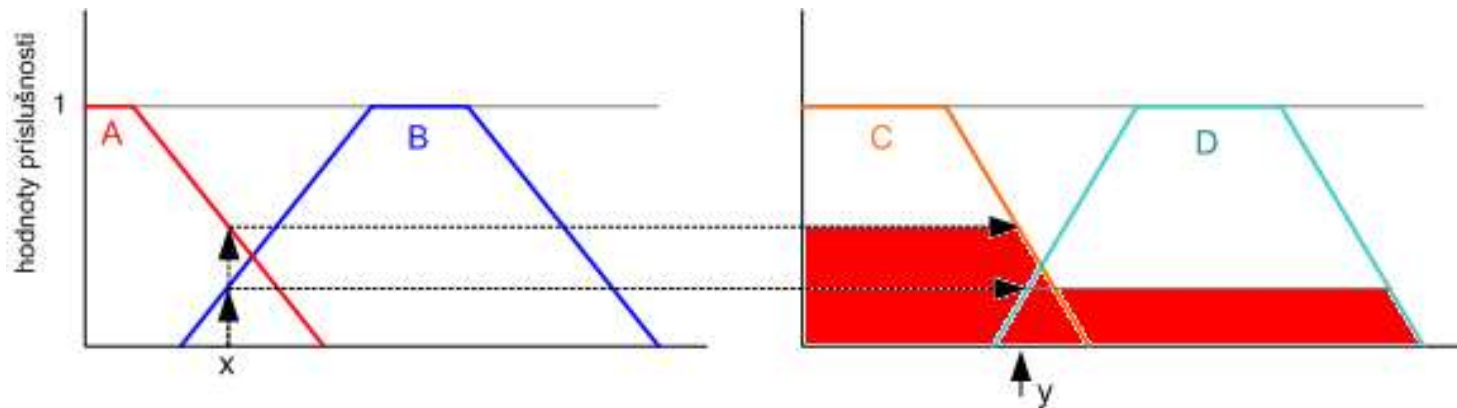


Agregace výstupů obou pravidel – výsledná množina je vyplněna červenou barvou.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Defuzzifikace výstupu

Defuzzifikace výstupu spočívá v nalezení těžiště plošného útvaru po agregování výstupů pravidel – na předchozím obrázku vyplněného červenou barvou. Hodnota  $y$  na ose  $X$  příslušející těžišti je potom hodnotou výstupní proměnné:



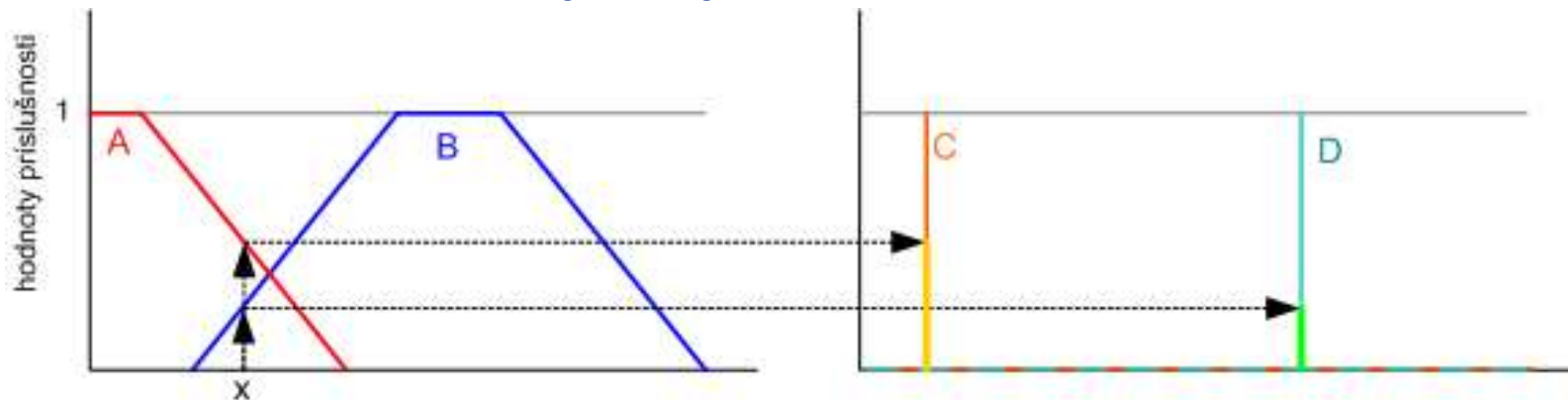
Nevýhodou této metody je, že se musí určit těžiště plošného útvaru, což nemusí být výpočtově jednoduché. V případě, kdy preferujeme rychlost před přesností (např. v řídicích systémech reálného času), můžeme použít Sugenuvu metodu.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Sugenova inferenční metoda

Při Sugenově metodě jsou fuzzy množiny výstupu zjednodušeny takovým způsobem, že mají hodnotu 1 v jediném bodu, všude jinde mají hodnotu 0. Tím se výpočet těžiště zjednoduší na výpočet váženého průměru jen několika hodnot.

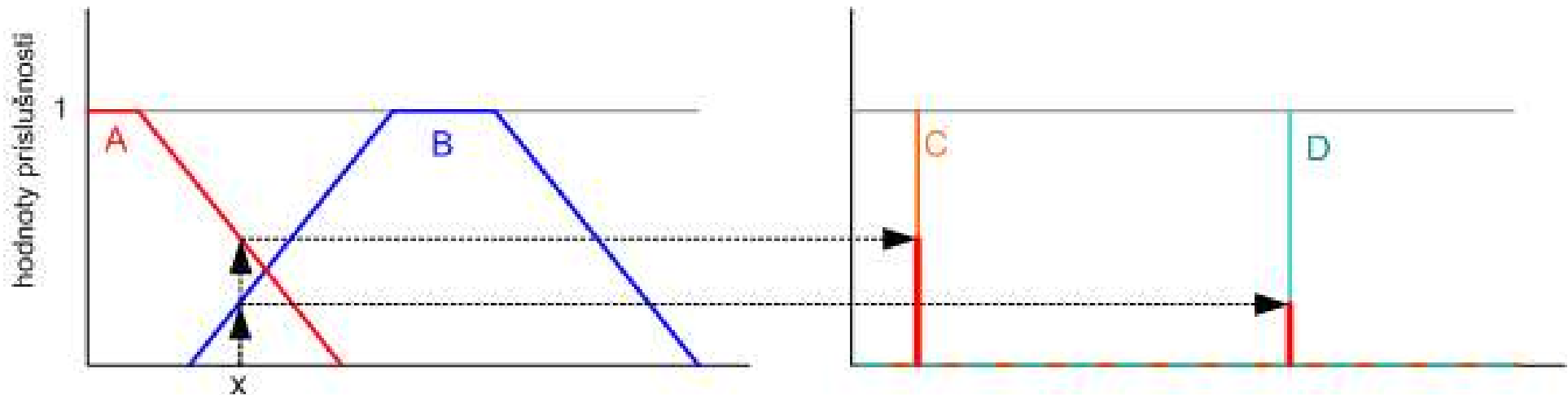
Vyhodnocení pravidel je podobné jako při Mamdaniho metodě, ale v tomto případě se výstupní funkce příslušnosti musí „ořezat“ na hodnotě příslušnosti vstupu jen v jediném bodě.



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Agregace výstupů aktivovaných pravidel Sugenovou metodou

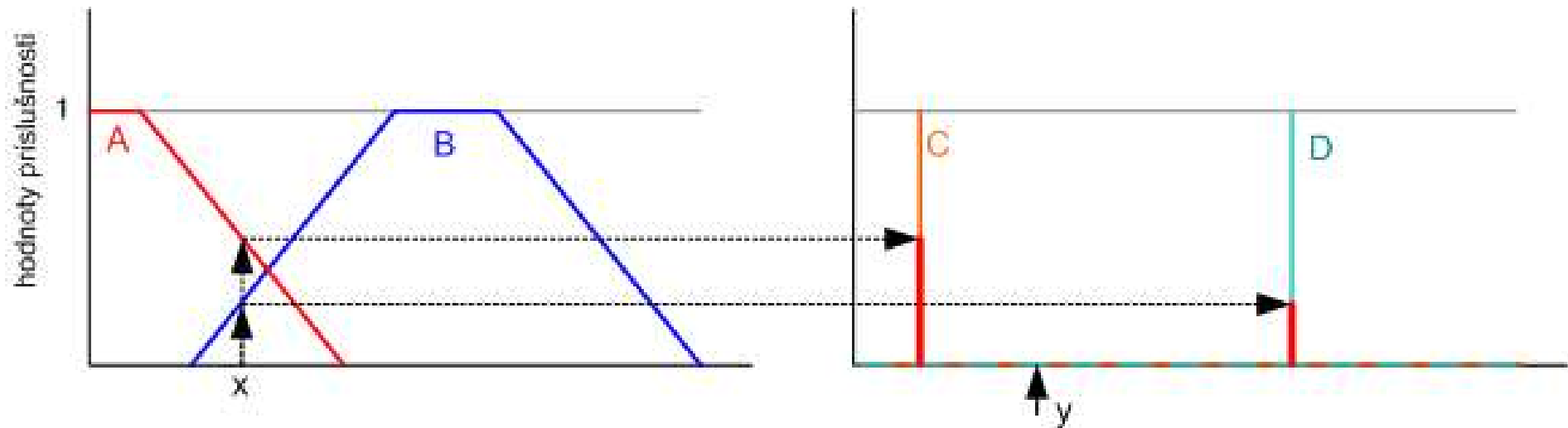
Sjednocením fuzzy množin výstupů ze všech pravidel vznikne jedna fuzzy množina, která bude mít funkci příslušnosti nulovou, kromě konečného počtu bodů, ve kterých bude nenulová. V našem případě jsou tyto body dva a hodnoty příslušnosti v těchto bodech jsou vyznačeny červenou barvou:



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

### Defuzzifikace výstupu

Defuzzifikace výstupu spočívá v nalezení střední hodnoty funkce příslušnosti vyčíslením váženého průměru nad body, ve kterých je funkce příslušnosti nenulová.



Poznámka: hodnota  $y$  je vyznačena na ose  $X$ .

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### Shrnutí:

Sugenova metoda je výpočtově jednodušší, avšak navzdory tomu dává poměrně dobré výsledky. Zjednodušení spočívá v tom, že se místo těžiště plošného útvaru pod funkcí příslušnosti agregované fuzzy množiny vypočítá jen vážený průměr konečného počtu bodů, ve kterých je funkce příslušnosti agregované fuzzy množiny nenulová.



### Jednoduchá formalizace fuzzy inference

- Fuzzy pravidlo: *IF podmínka THEN důsledek*
- Fuzzy ZS ukládá pravidla do matice  $M$  (jako asociace  $(A, B)$ )
- V matici  $M$  se fuzzy množina  $A$  zobrazuje do fuzzy množiny  $B$

$$A \cdot M = B$$

a k tomu je nutné určit matici  $M$  :

$$M = \begin{bmatrix} a_1 \rightarrow b_1 & \cdots & a_1 \rightarrow b_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \rightarrow b_1 & \cdots & a_n \rightarrow b_m \end{bmatrix}$$

Dále pak určíme  $B^+ = A^+ \cdot M$

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

Operátory:

- Max-min inference:  $M = m_{ij} = \min(a_i, b_j)$
- Max-product inference:  $M = m_{ij} = a_i \cdot b_j$

$$B^+ : b_j = \max\{\min(a_i^+, m_{ij})\}, i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \text{operátor } A^+ \cdot M$$

V reálné situaci je množina  $A^+$  tvořena jedním číslem a pak platí:

$$B^+ = \mu_A(x_{single}) \wedge \mu_B(y)$$

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### Defuzzifikace

V rámci defuzzifikace se snažíme o získání jedné (významné) hodnoty z fuzzy množiny. Fuzzy logika používá pro převod fuzzy proměnných do reálných proměnných různých transformačních postupů. Jedním z často používaných je princip maxima nebo princip těžiště výsledné fuzzy množiny.

U principu maxima charakteristické funkce množiny platí hodnota pro celý interval řízené proměnné, pak se jako defuzzifikovaná hodnota bere střed intervalu.

U principu těžiště se jako defuzzifikovaná hodnota bere těžiště výsledné fuzzy množiny.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

Pro diskrétní charakteristickou funkci fuzzy množiny  $D^{x^n}$  určíme těžiště podle vzorce

$$x_T = \frac{\sum_i x_i \mu^{X_c}(x_i)}{\sum_i \mu^{X_c}(x_i)}, \quad \text{respektive} \quad x = \frac{\sum_{j=1}^N x_j \mu_A(x_j)}{\sum_{j=1}^N \mu_A(x_j)},$$

a pro spojitou charakteristickou funkci

$$x_T = \frac{\int x \mu^{X_c}(x) dx}{\int \mu^{X_c}(x) dx}$$

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### Shrnutí – sedm pravd o fuzzy logice

1. Fuzzy logika není fuzzy (zmatená, nepřesná). Fuzzy logika není doopravdy nepřesná, neodporuje zdravému rozumu ani nedává nejednoznačné výsledky. Klasická booleovská logika je ve skutečnosti pouze zvláštním případem fuzzy logiky.
2. Fuzzy logika je něco jiného než pravděpodobnost. Pomocí pravděpodobnosti se snažíme zjistit něco o možném výsledku jasně definovaných jevů, které mohou nastat na základě náhody. S fuzzy logikou se snažíme určit něco o podstatě jevů samotných. Vlastnost "být fuzzy" se často vyjadřuje jako víceznačnost, nikoliv jako nepřesnost nebo nejistota; to je charakteristické pro vnímání, stejně jako pro myšlení.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

3. **Návrh fuzzy množin je snadný.** Fuzzy množiny obecně odrážejí způsob, jakým lidé skutečně přemýšlejí o problémech. Většinou lze přibližnou podobu fuzzy množiny navrhnout snadno a rychle. Později, po testování a dalších zkušenostech, můžeme upravit její detailní charakteristiky.
4. **Fuzzy systémy jsou stabilní, snadno nastavitelné a lze snadno ověřit jejich správnost.** Protože fuzzy logika zvládá všechny provázané stupně volnosti, je rychlejší a snazší navrhnout fuzzy množiny a fuzzy systém než vytvářet klasický znalostní systém. Fuzzy systémy lze validovat stejně jako klasické systémy, ale nastavení fuzzy systémů je obvykle mnohem snadnější.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

5. Fuzzy systémy nejsou neuronové sítě. Fuzzy systém se snaží nalézt průnik, sjednocení nebo doplněk fuzzy řídicích proměnných. Ačkoliv je to podobné jak neuronovým sítím, tak lineárnímu programování, přístup fuzzy systémů k těmto problémům je odlišný.
6. Fuzzy logika je více než řízení procesů. Ačkoliv někteří lidé vidí ve fuzzy logice hlavně nástroj pro řízení procesů a analýzu signálů, tato interpretace je příliš limitující. Fuzzy logika představuje způsob reprezentace a analýzy informací nezávislý na konkrétních aplikacích.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

7. Fuzzy logika je nástrojem usnadňujícím reprezentaci informací a uvažování o nich. Fuzzy logika je silným a univerzálním nástrojem pro reprezentaci nepřesných, víceznačných a vágních informací. Není schopná řešit všechno, ale může nám pomoci modelovat i velmi obtížné problémy.



## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---

### Závěr

Fuzzy systémy a fuzzy logika jsou velmi výhodný způsob, jak zapisovat nepřesné znalosti získané například od expertů v dané oblasti. Hodnoty příslušnosti k fuzzy množině jsou bližší lidskému chápání než ostrá vymezení (ohraničení) v Booleovské logice.

Fuzzy znalostní systémy jsou většinou realizovány jako pravidlové systémy, které využívají fuzzy logiku v podmínkové a akční části pravidel. Fuzzy logice musí být přizpůsoben i použitý inferenční algoritmus. Z inferenčních algoritmů, které byly prezentovány, Mamdaniho metoda je přesnější, ale výpočetně náročnější, a Sugenoova metoda je méně přesná, ale výpočetně jednodušší, vhodná na použití v řídicích systémech reálného času.

## 9. Vybrané kapitoly z fuzzy logiky

---