

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

23. 3. 2019

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

- předmětů
- jevů
- situací
- . . .

Obecně hovoříme o klasifikaci, rozpoznávání a shlukování **objektů**.

Reprezentace objektů

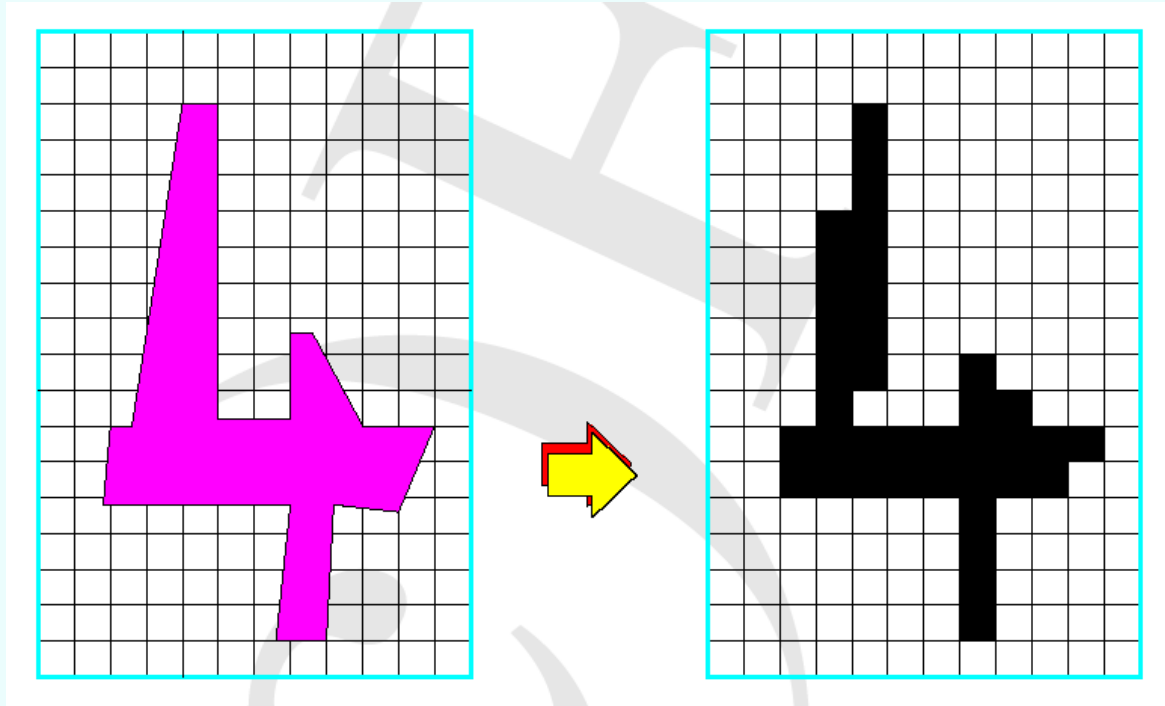
- ▶ prostřednictvím signálů
 - jednorozměrných (zvuky, hudba, řeč, ...)
 - dvourozměrných (snímky scén, ...)
 - vícerozměrných (obecné)

Podle charakteru reprezentace objektů signály rozlišujeme objekty (a jejich rozpoznávání)

- vizuální (reálné, upravené, symbolické, stylizované aj.)
- akustické (zvuky, hluky, hudba, řeč, ..., vždy jednorozm.)
- taktilní (obecně reprezentované n -rozměrnými signály)

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příklad reprezentace číslice '4' v pravoúhlém rastru:



Reprezentace tzv. jasovou funkcí:

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ reprezentuje-li obrazový bod bílou barvu podkladu} \\ 1, \text{ reprezentuje-li obrazový bod černou barvu písma} \end{array} \right\}$$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Př.: Praktická ukázka:

1	00000000000000000000000000000000	* 0	1	11111111111111111111111111111111	* 35
2	00000000000000000000000000000000	* 0	2	10000000000000001000111111111111	* 17
3	00000000000000000000000000000000	* 0	3	10000000000000000000000000000011	* 3
4	00000000000000000000000000000000	* 0	4	10000000000000000000000000000011	* 3
5	00000000000000000000000000000000	* 0	5	10000000000000000000000000000011	* 4
6	00000000000000000000000000000000	* 0	6	00000000000000000000000000000011	* 2
7	00000000000000000000000000000000	* 0	7	00000000000011111000000000000011	* 8
8	00000000000000001111110000000000	* 6	8	10000000000111111111000000000011	* 12
9	00000000000000111111111110000000	* 12	9	00000000001111111111110000000011	* 15
10	00000000000011111111111110000000	* 16	10	00000000011111111111110000000011	* 18
11	00000000001111111111111111000000	* 19	11	00000000111111111111111000000011	* 19
12	00000000011111111111111111000000	* 22	12	00000001111111111111110000000011	* 20
13	0000000011111111000000011111100000	* 16	13	00000011111100000001111110000011	* 16
14	0000000011111000000000011111100000	* 13	14	0000011111100000000111111000000011	* 15
15	0000000011110000000000000111110000	* 9	15	00000111111000000000011111000000011	* 13
16	0000000001100000000000000111110000	* 7	16	00000111100000000000011111000000011	* 11
17	0000000000000000000000000111110000	* 5	17	00000111100000000000011111000000011	* 12
18	00000000000000000000000001111110000	* 6	18	0000000000000000000000011111000000011	* 7
19	00000000000000000000000001111110000	* 6	19	0000000000000000000000011111000000011	* 7
20	00000000000000000000000001111110000	* 7	20	0000000000000000000000011111000000011	* 7
21	00000000000000000000000001111110000	* 7	21	0000000000000000000000011111000000011	* 8
22	000000000000000000000000011111100000	* 6	22	00000000000000000000000111111000000011	* 8
23	000000000000000000000000011111100000	* 6	23	000000000000000000000001111110000000011	* 8
24	000000000000000000000000011111100000	* 6	24	0000000000000000000000011111100000000011	* 8
25	000000000000000000000000011111100000	* 6	25	0000000000000000000000011111100000000011	* 7
26	000000000000000000000000011111100000	* 6	26	0000000000000000000000011111100000000011	* 7
27	000000000000000000000000011111100000	* 6	27	00000000000000000000000111111000000000011	* 8
28	000000000000000000000000011111100000	* 6	28	00000000000000000000000111111000000000011	* 8
29	000000000000000000000000011111100000	* 6	29	000000000000000000000001111110000000000011	* 8
30	000000000000000000000000011111100000	* 6	30	000000000000000000000001111110000000000011	* 9
31	000000000000000000000000011111100000	* 6	31	000000000000000000000001111110000000000011	* 8
32	00000000000000000000000001111100000	* 5	32	00000000000111111100000000000000111	* 10
33	00000000000000000000000001111100000	* 5	33	00000000001111111000000000000000111	* 10
34	0000000000001111100000000000000000	* 5	34	00000000011111100000000000000000111	* 9
35	0000000000011111100000000000000000	* 6	35	00000000111111111111100000000000111	* 16
36	0000000000111111000000000000000000	* 6	36	00000001111111111111110000000000111	* 20
37	0000000001111110000000000000000000	* 6	37	0000000111111111111111100000000111	* 21
38	0000000011111110000000000000000000	* 7	38	0000000111111111111111100000000111	* 21
39	0000000011111111111111111000000000	* 22	39	0000000111111111111111100000000111	* 21
40	0000000111111111111111111110000000	* 24	40	00000001111111111111111000000000111	* 19
41	0000000111111111111111111110000000	* 24	41	00000000000000001111111000000001111	* 12
42	0000000111111111111111111110000000	* 24	42	000000000000000001011000000001111	* 7
43	000000000000000000000000011111100000	* 7	43	000000000000000000000000000000001111	* 4
44	0000000000000000000000000000000000	* 0	44	000000000000000000000000000000001111	* 5
45	0000000000000000000000000000000000	* 0	45	00000000000000000000000000000000111111	* 8
46	0000000000000000000000000000000000	* 0	46	111111111111111111111111111111111111	* 35
47	0000000000000000000000000000000000	* 0	47	111111111111111111111111111111111111	* 35
48	0000000000000000000000000000000000	* 0	48	111111111111111111111111111111111111	* 35
49	0000000000000000000000000000000000	* 0	49	111111111111111111111111111111111111	* 35
50	0000000000000000000000000000000000	* 0	50	111111111111111111111111111111111111	* 35

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Rozpoznávání, klasifikace a shlukování

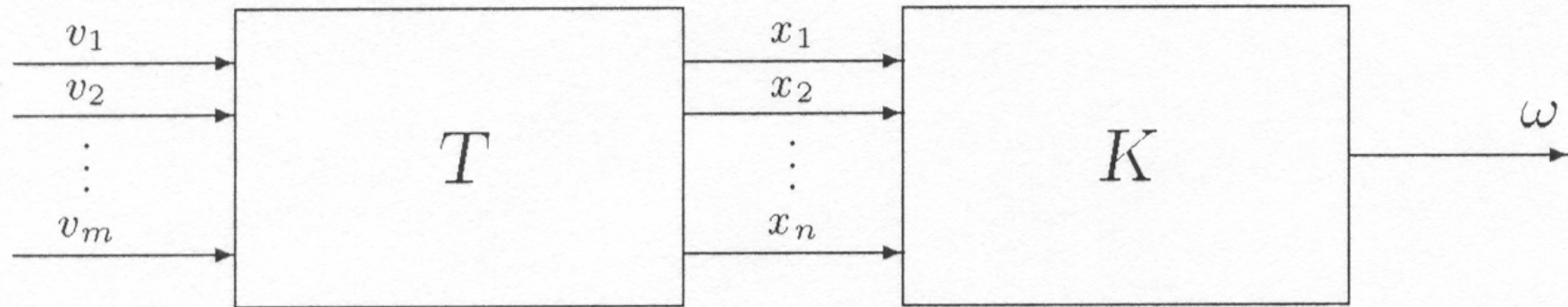
Rozpoznávání chápeme jako úlohu, při které objekty zařazujeme do tříd podle jejich společných vlastností tak, že objekty vzájemně si podobné zařazujeme do stejné třídy.

Rozlišujeme:

- **klasifikaci** – zařazujeme do předem známého, pevného počtu tříd (například rozpoznávání znaků)
- **rozpoznávání** – počet tříd není předem znám a třídy identifikujeme až během vlastního rozpoznávání (například rozpoznávání plynulé řeči)
- **shlukování (klastrování)** – zařazujeme objekty do tříd na základě jejich podobnosti, příslušné třídy nejsou známy

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Obecná klasifikační úloha



T . . . transformace vstupních charakteristik – vytvoření obrazu

K . . . klasifikátor

\mathbf{v} . . . vektor vstupních charakteristik

\mathbf{x} . . . obraz (symbolický popis) objektu

ω . . . indikátor třídy

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Rozhodovací pravidlo

Rozhodovací pravidlo, podle kterého klasifikátor přiřazuje obraz do klasifikační třídy, můžeme obecně definovat jako skalární funkci vektorového argumentu

$$\omega = d(\mathbf{x}) .$$

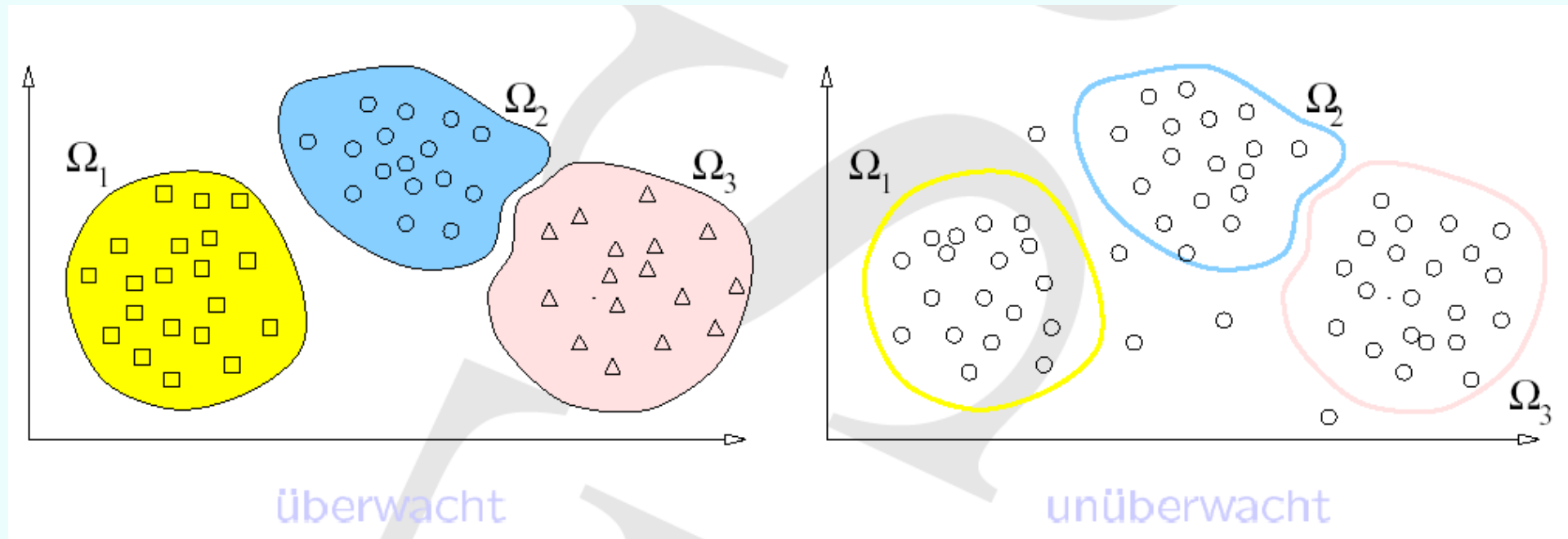
Přesnější vyjádření rozhodovacího pravidla, které zohledňuje i tzv. nastavení klasifikátoru \mathbf{q} , je

$$\omega = d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) .$$

Nastavení klasifikátoru se provádí **trénováním** neboli **učením**. Rozlišujeme **učení s učitelem**, kdy klasifikátoru předkládáme obrazy, u nichž známe jejich příslušnost k třídě, a **učení bez učitele**, kdy správné zařazení do klasifikačních tříd neznáme.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Učení (trénování) klasifikátoru



überwacht

s učitelem

unüberwacht

bez učitele

Rozpoznávání a klasifikace objektů

➡ na základě vlastností objektů

Vlastnosti objektů

- měřitelné a kvantifikovatelné
- strukturní

Podle typu vlastností objektů hovoříme o

- vytváření **příznakového** nebo **strukturního** popisu objektů
- **příznakových** nebo **strukturních** metodách rozpoznávání

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příznakový nebo strukturní popis rozpoznávaných (klasifikovaných) objektů – obecně hovoříme o vytváření symbolických popisů objektů – nazýváme popisem objektů jejich **obrazy**.

Tedy: **Obraz objektu = symbolický popis objektu**

Stejně jako metody rozlišujeme i obrazy (symbolické popisy objektů)

- tvořené příznaky (vektory příznaků)
- strukturní

Obsahují-li obrazy objektů n složek, pak všechny rozpoznávané (klasifikované) obrazy tvoří **obrazový prostor** úlohy.

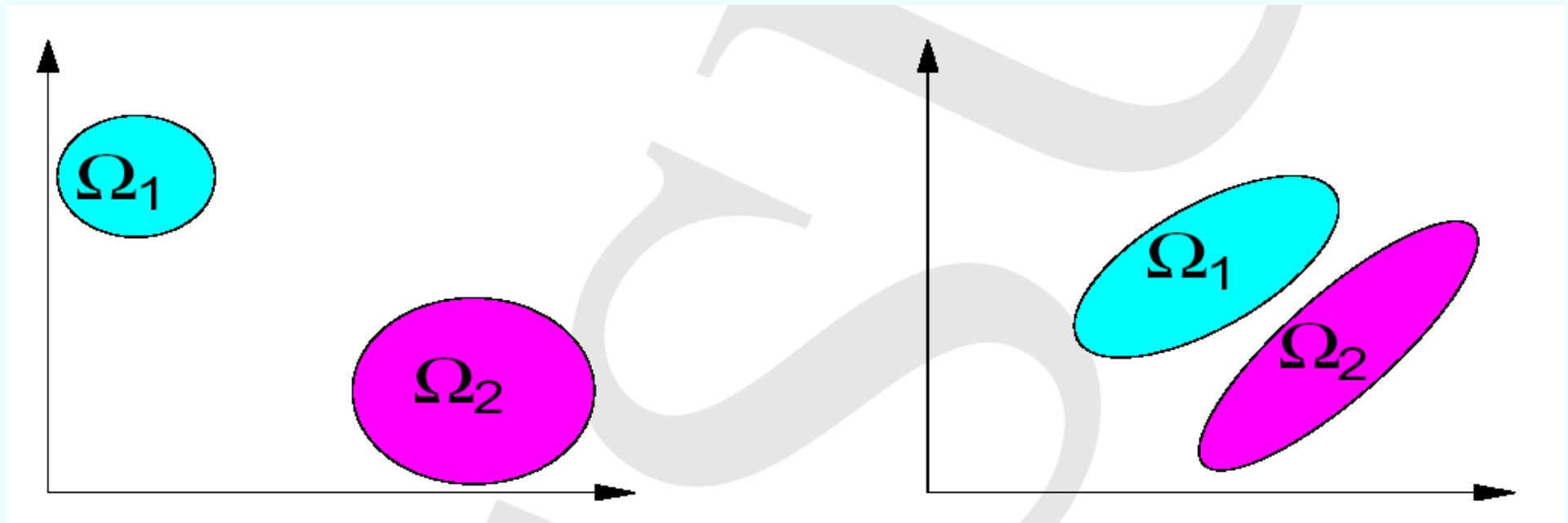
Jednotlivé klasifikační třídy objektů získáme **rozkladem obrazového prostoru** úlohy na R klasifikačních tříd.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příklady rozkladu obrazového prostoru na třídy

a) třídy disjunktční, s velkou mezi-
třídní vzdáleností – ideální případ

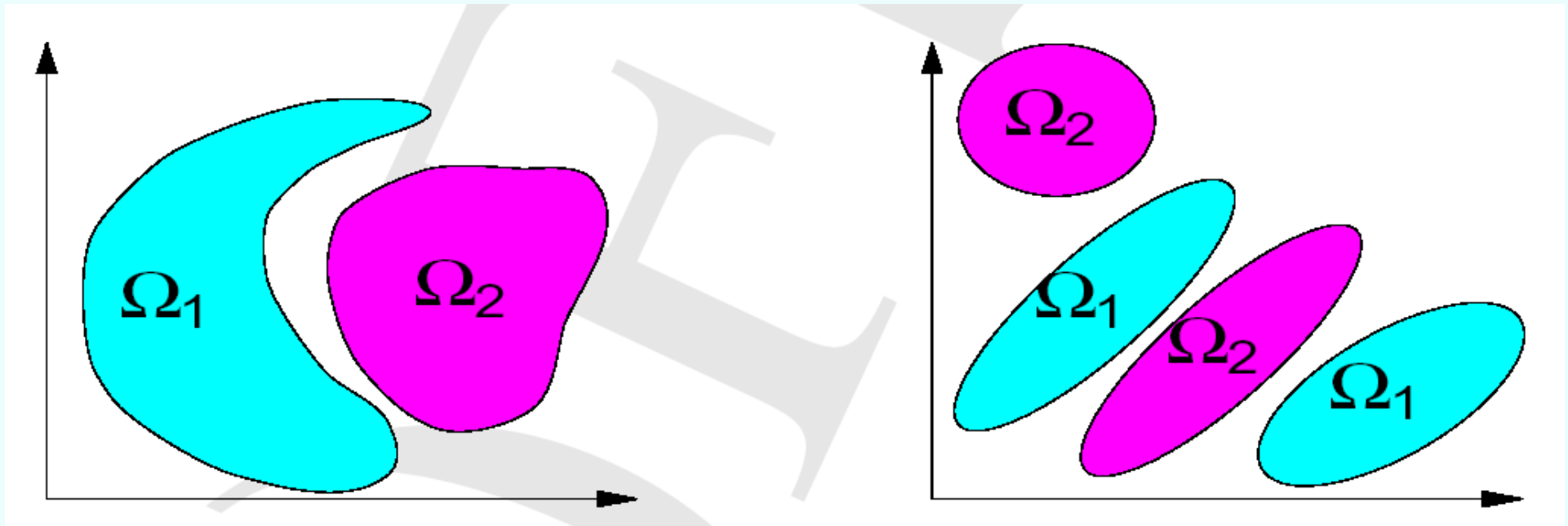
b) třídy disjunktční, kompaktní,
geometricky „blízké“



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

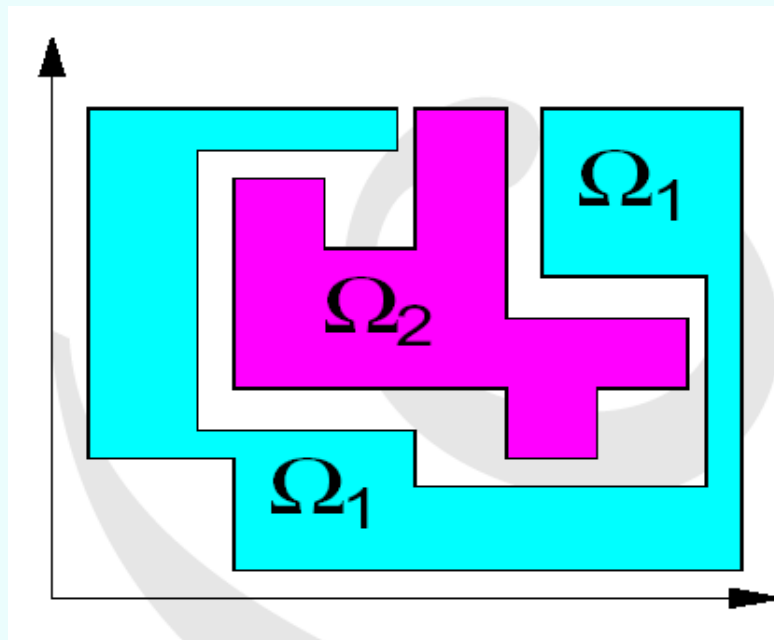
c) třídy disjunkt ní, kompak ní, s nelineární oddělující nadplochou

d) třídy disjunkt ní, nekompak ní, avšak lineárně oddělitelné

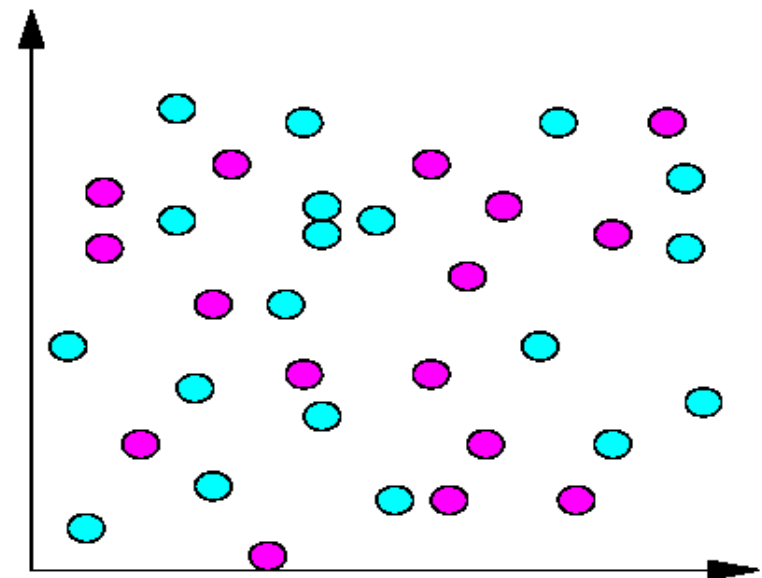


4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

e) třídy disjunkt ní, kompaktní, vnořené, komplikovaně oddělitelné (s rozdělující nadplochou složitého tvaru)

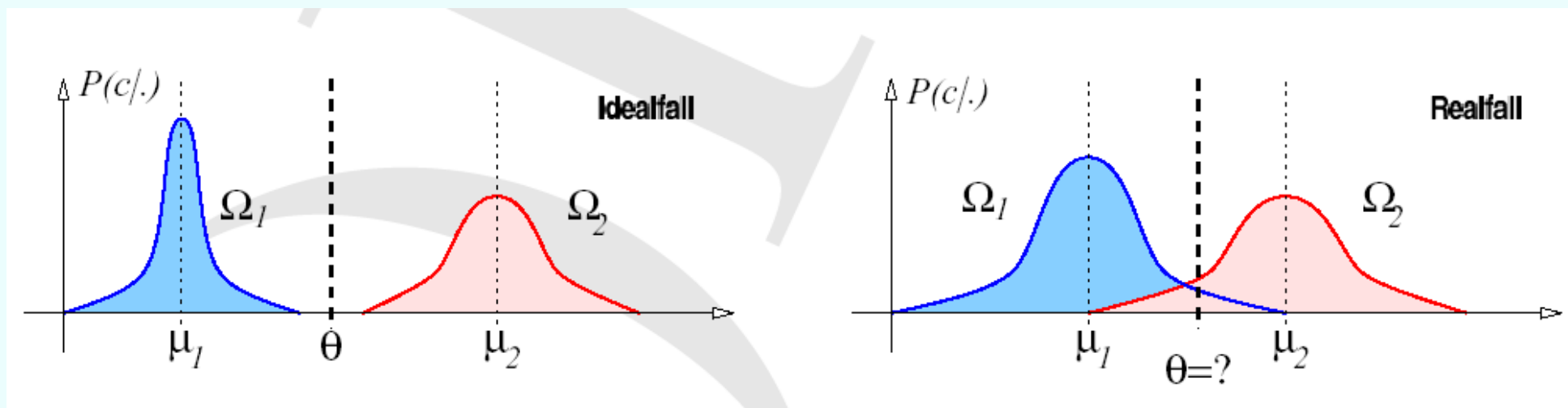


f) nekompaktní, prolínající se třídy s velmi obtížně určitelnou rozdělující nadplochou



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Pokud vezmeme v úvahu pravděpodobnostní rozložení obrazů uvnitř jednotlivých tříd:



ideální případ – klasifikační třídy se nepřekrývají – jsou disjunktní – o zařazení obrazu do třídy ω_1 nebo ω_2 lze rozhodnout s jistotou, čili s $P = 1$

reálný případ – klasifikační třídy se překrývají – v oblasti okolo rozdělovací nadplochy lze o zařazení obrazu do příslušné třídy jen s pravděpodobností $P < 1$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Shlukování

= sdružování objektů do tříd na základě podobnosti

Shluk

= skupina objektů, které si jsou **co nejvíce** podobné uvnitř shluku a **co nejméně** podobné mezi shluky

Metody

- rozdělovací metody
- hierarchické metody
- metody založené na hustotě prvků
- mřížkové metody
- další metody (založené např. na neuronových sítích)

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Algoritmus k-means

– rozdělovací metoda

Princip: dělení prvků podle kritéria, podobnostní funkce (vzdálenost)

Shluk je reprezentován těžištěm objektů

Popis algoritmu

1. zadání počtu shluků **k** a množiny všech objektů
2. volba **k** výchozích „středů“ shluků
3. přiřazení všech objektů ke „středu“ shluku s **nejmenší vzdáleností** na základě podobnostní funkce (vzdálenosti)
4. výpočet nového „středu“ u každého shluku = „těžiště“ množiny objektů
5. návrat ke kroku 2

Konec = nezměněna pozice žádného objektu

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Základní typy dat

Intervalové proměnné

Př: pozice, váha, výška, intenzita (jas), datum

Nutnost **normalizace** – obvykle interval [0; 1]
– snaha nastavit všem proměnným stejnou váhu

Binární proměnné

Pouze dva stavy: **1** – přítomnost vlastnosti
0 – nepřítomnost vlastnosti

Př: objekt složen z primitiv (čtverec, trojúhelník a kružnice)

Objekt č. 1 – 1 0 0

č. 2 – 1 0 1

Nejznámější metriky pro měření vzdálenosti

- Eukleidovská vzdálenost
- Manhattan vzdálenost
- Cosinová vzdálenost

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Evaluační metriky

- vyhodnocení přesnosti klasifikace (rozpoznávání)
- udává se zpravidla v % nebo jako desetinné číslo

Dělení:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| <i>1–1 (klasifikace)</i> | <i>1–n (rozpoznávání)</i> |
| • chybovost (Error Rate) | accuracy |
| • accuracy | přesnost, úplnost, F-míra |

Konfúzní matice

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Chybovost (Error Rate)

$$ER = E / ALL$$

E = počet chyb

ALL = počet všech klasifikovaných vzorků

Přesnost (accuracy, klasifikace 1–1)

$$ACC = OK / ALL = 1 - ERR$$

OK = počet správně klasifikovaných vzorků

Př:

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Přesnost (accuracy, rozpoznávání 1-n)

$$ACC = (N - D - S - I) / N$$

N = počet všech rozpoznávaných jednotek v sekvenci

D = počet vynechaných jednotek

S = počet zaměněných jednotek

I = počet vložených jednotek

Př:

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Přesnost, úplnost, F-míra

odhad / reál	1	0
1	TP	FP
0	TN	FN

TP = správně odhadnuté pozitivní příklady

TN = správně odhadnuté negativní příklady

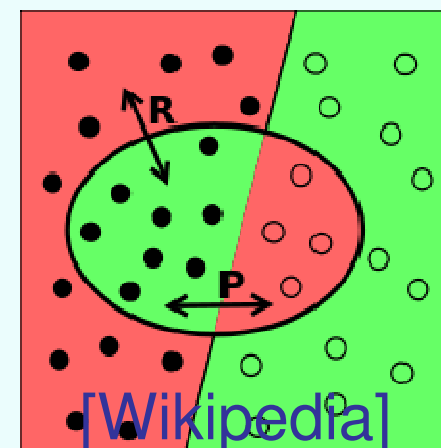
FP = špatně odhadnuté negativní příklady

FN = špatně odhadnuté pozitivní příklady

$Pr = TP / (TP + FP)$... přesnost

$Rec = TP / (TP + FN)$... úplnost

$F\text{-mes} = 2.Pr.Rec / (Pr + Rec)$



Př:

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Konfúzní matice (matice záměn)

= matice, která obsahuje hodnoty přesnosti klasifikátoru s ohledem na všechny klasifikované prvky

Př:

	a	b	c
a	88	4	12
b	8	65	4
c	11	15	33

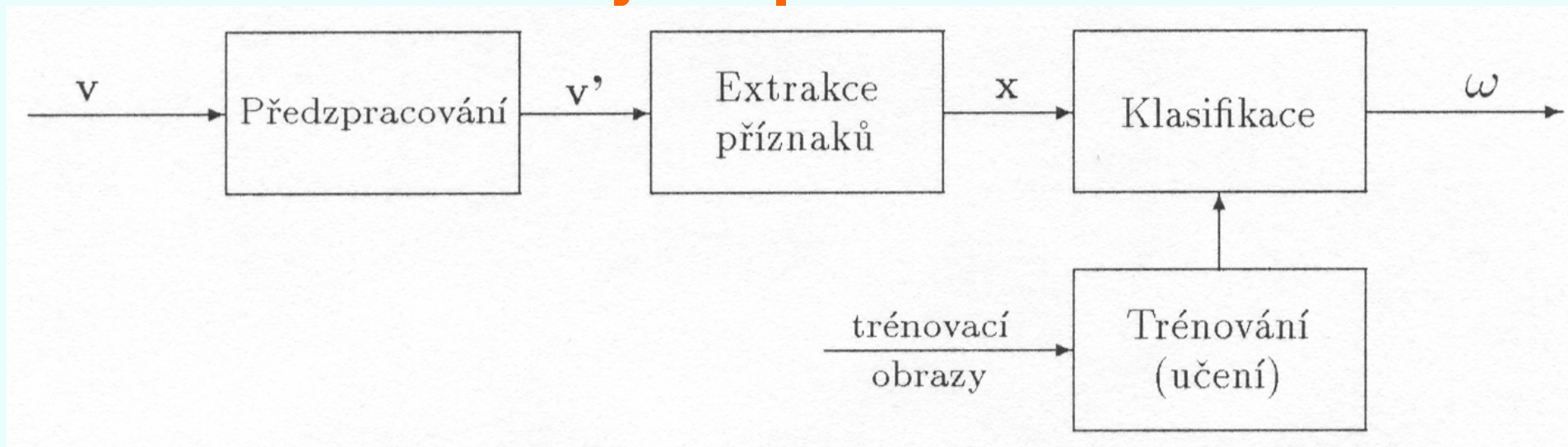
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Praktické příklady

- klasifikace dokumentů
- rozpoznávání dialogových aktů

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příznakové metody rozpoznávání



Obrazy objektů reprezentovány **vektory příznaků** x ,
zařazování obrazů do tříd – klasifikace **deterministickým** nebo
stochastickým rozhodovacím pravidlem ve tvaru

$$\omega = d(x), \text{ resp. } \omega = d(x, q),$$

kde x je klasifikovaný obraz objektu,
 q je vektor nastavení klasifikátoru.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Jako obraz (vektor příznaků) lze použít např.:

1. naměřené veličiny přímo,
2. spektrální koeficienty,
3. logaritmus kvadrátu spektra posloupnosti vzorků, např.
 $10 * \log |\mathbf{V}|^2$, kde \mathbf{V} je Fourierův obraz vektoru \mathbf{v} ,
4. histogram jednoho řádku snímku,
5. úhlové projekce (např. po 45 stupních) průsečíků průvodiče se sejmutým znakem,
6. řetězový kód středové osy podpisu,
7. ortogonální nebo biortogonální transformace signálů aj.

Formalizace úlohy příznakového rozpoznávání

Definice 1.1:

Prostředí (okolí, prostor) úlohy je množina veličin měřitelných fyzikálními principy a přístroji. Úloha rozpoznávání je pak reprezentována množinou funkcí

$$\mathcal{V} = \{ v_i(\mathbf{u}) \mid i = 1, 2, \dots \} ,$$

kde \mathbf{u} je obecný vektor vstupních parametrů; v mnoha případech je však touto nezávisle proměnnou **čas** – pak funkce $v_i(t)$ reprezentují časově proměnné vstupní veličiny.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Definice 1.2:

Množinu obrazů dané úlohy (obrazový prostor) označíme \mathcal{X} a budeme předpokládat, že tato zahrnuje pouze obrazy objektů a funkcí, které přísluší ostře (jednoznačně) vymezené aplikační oblasti nebo podmnožině prostředí. Je definována množinou funkcí $f_i(\mathbf{v})$:

$$\mathcal{X} = \{ f_i(\mathbf{v}) \mid i = 1, 2, \dots, n \} .$$

Definice 1.3:

Prvky množiny obrazů dané úlohy $\mathcal{X} = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \}$ nazýváme obrazy rozpoznávaných (klasifikovaných) objektů, obraz k-tého objektu je dán :

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f_{k1}(v_1, v_2, \dots, v_m) \\ f_{k2}(v_1, v_2, \dots, v_m) \\ \dots \\ f_{kn}(v_1, v_2, \dots, v_m) \end{pmatrix} .$$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Definice 1.4:

Metody rozpoznávání se zabývají matematickými a technickými aspekty automatické klasifikace formálních popisů objektů – obrazů. Rozlišujeme:

- klasifikaci jednoduchých obrazů,
- analýzu a porozumění komplexním obrazům.

Definice 1.5:

Klasifikací rozumíme jednoznačný přiřazovací předpis, který každému obrazu \mathbf{x}_i z množiny \mathcal{X} přiřadí jednoznačně indikátor třídy ω_r , $r = 1, 2, \dots, R$, R je pevně daný počet klasifikačních tříd. Množinu indikátorů tříd označíme $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_R \}$.

Poznámka: V reálných případech obvykle zařadíme do množiny Ω speciální třídu ω_0 ($R + 1$.), do níž zařazujeme nerozpoznané obrazy (obrazy, o jejichž zařazení nelze jednoznačně rozhodnout).

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Definice 1.6:

Bud' dána daná problémová oblast, její obrazový prostor \mathcal{X} , počet klasifikačních tříd $R \in \mathbb{N}$ a rozklad množiny (prostoru obrazů) \mathcal{X} na podprostory $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_R$ takový, že platí

$$\mathcal{X}_r \neq \emptyset, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

$$\mathcal{X}_r \cap \mathcal{X}_s = \emptyset, \quad r, s = 1, 2, \dots, R, \quad r \neq s,$$

$$\bigcup_{r=1}^R \mathcal{X}_r = \mathcal{X}, \quad \text{popř.} \quad \bigcup_{r=0}^R \mathcal{X}_r = \mathcal{X}.$$

Oblasti \mathcal{X}_r pak nazýváme klasifikačními třídami, resp. klasifikačními oblastmi, a klasifikační úlohu úlohou s oddělitelnými (separovatelnými) třídami.

Poznámka: Ke zjednodušení klasifikační úlohy dojde tehdy, když klasifikační třídy budou po dvojicích disjunktní.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Definice 1.7:

Budiž \mathcal{X} obrazový prostor dané úlohy, \mathcal{A} konečná abeceda formálního jazyka a $\mathcal{L}_\omega \subseteq \mathcal{A}^*$ formální jazyk definovaný nad abecedou \mathcal{A} .
Zobrazení

$$J: \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}_\omega \\ f \mapsto b = J(\mathbf{x}) \end{array} \right\}$$

nazveme interpretační funkcí \mathcal{X} jazyka \mathcal{L}_ω . Řetězec (slovo) $b = J(\mathbf{x})$ pak nazveme symbolickým popisem (obrazem) objektu reprezentovaného vektorem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Poznámka: Symbolické popisy objektů příslušejících do jednotlivých klasifikačních tříd jsou slovy jazyka dané třídy a nesouvisejí se symbolickými popisy objektů vytvářenými strukturními metodami rozpoznávání.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Definice 1.8:

Určení (výpočet) jednotlivých obrazů objektů (symbolického popisu objektů) se nazývá **analýzou obrazů** (někdy též **vzorů**).

Definice 1.9:

Systemem analýzy obrazů je zpravidla nazýván **algoritmický postup analýzy obrazů** (symbolických popisů objektů).

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příznakové metody rozpoznávání dělíme na

1. „klasické“ statistické metody rozpoznávání, založené na použití tzv. diskriminačních funkcí (Fisher) nebo pravděpodobnostech příslušnosti ke klasifikačním třídám (Bayes) ;
2. metody založené na strojovém učení – učení z příkladů; rozlišujeme
 - učení s učitelem (supervised learning) nebo
 - učení bez učitele (unsupervised learning) ;
3. metody založené na použití umělých neuronových sítí, tzv. neuronové klasifikátory .

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Klasifikátor s diskriminační funkcí

Pro každou třídu definujeme takovou diskriminační funkci, aby pro všechny obrazy patřící do r -té klasifikační třídy platilo

$$g_r(\mathbf{x}) > g_s(\mathbf{x}) \quad / \quad r \in \langle 1, R \rangle, \quad s = 1, \dots, R, \quad r \neq s.$$

Rozhodovací pravidlo pak nabývá tvaru

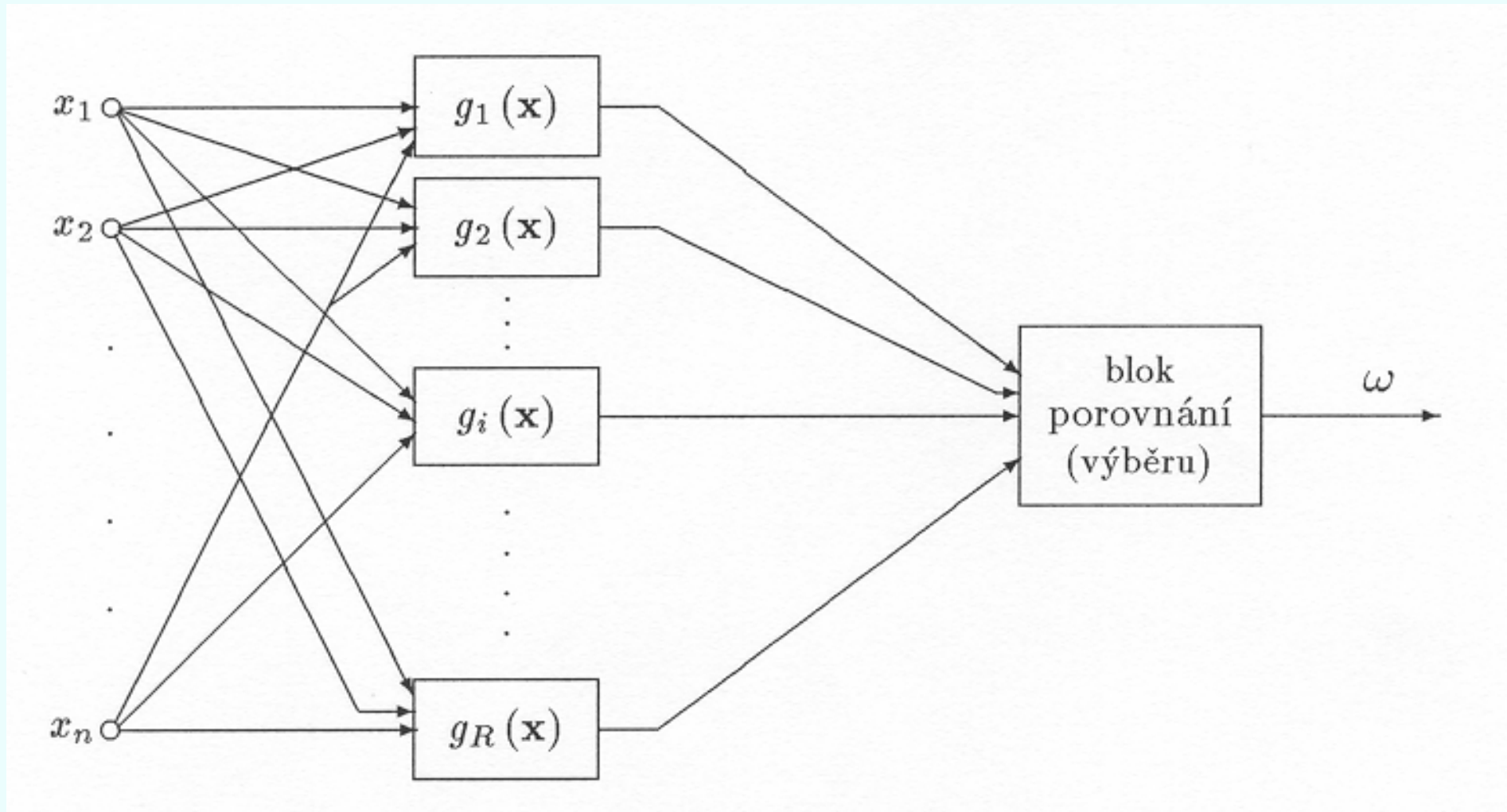
$$\omega_r = \max (g_s(\mathbf{x})), \quad s = 1, \dots, R$$

a rovnice rozdělujících nadploch určíme řešením soustavy rovnic

$$g_r(\mathbf{x}) - g_s(\mathbf{x}) = 0 \quad / \quad r, s = 1, \dots, R, \quad r \neq s.$$

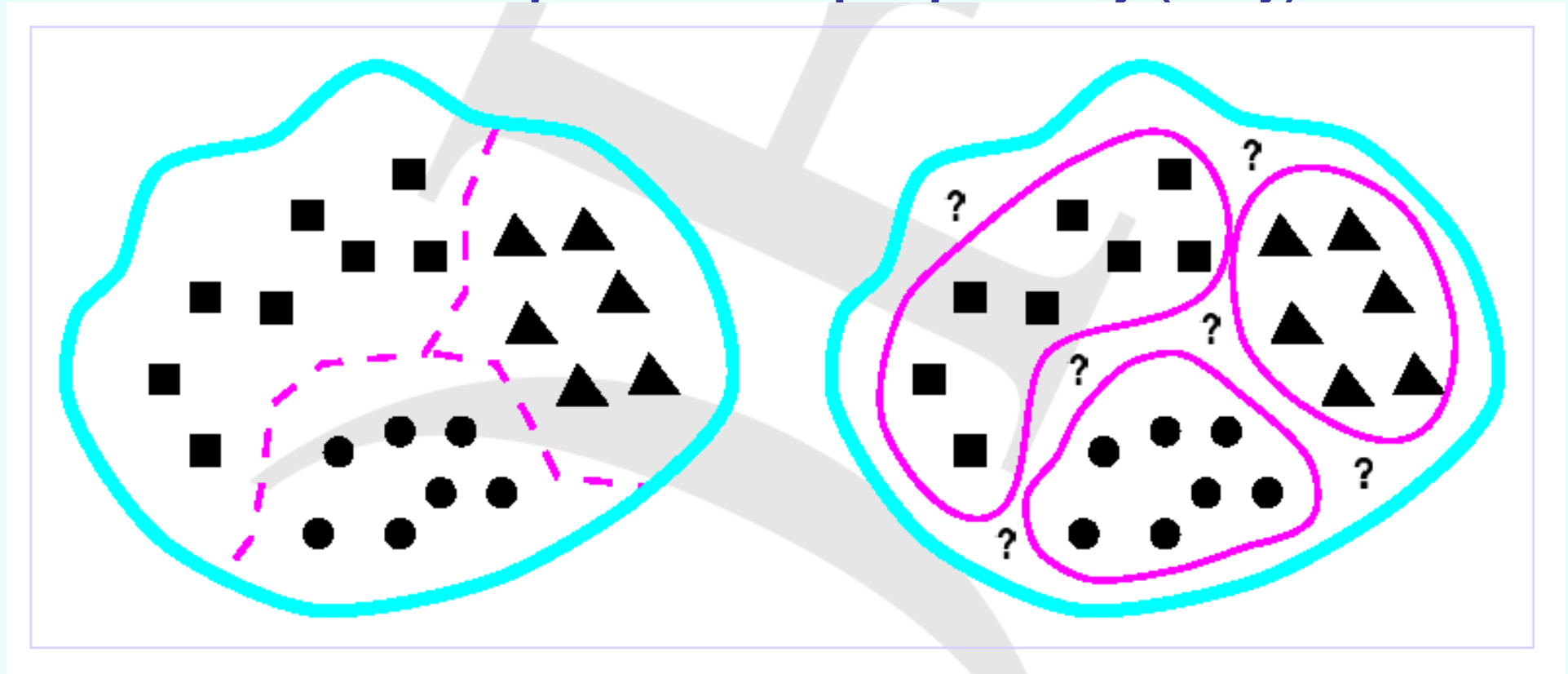
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Struktura klasifikátoru



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Rozklad obrazového prostoru na podprostory (třídy)

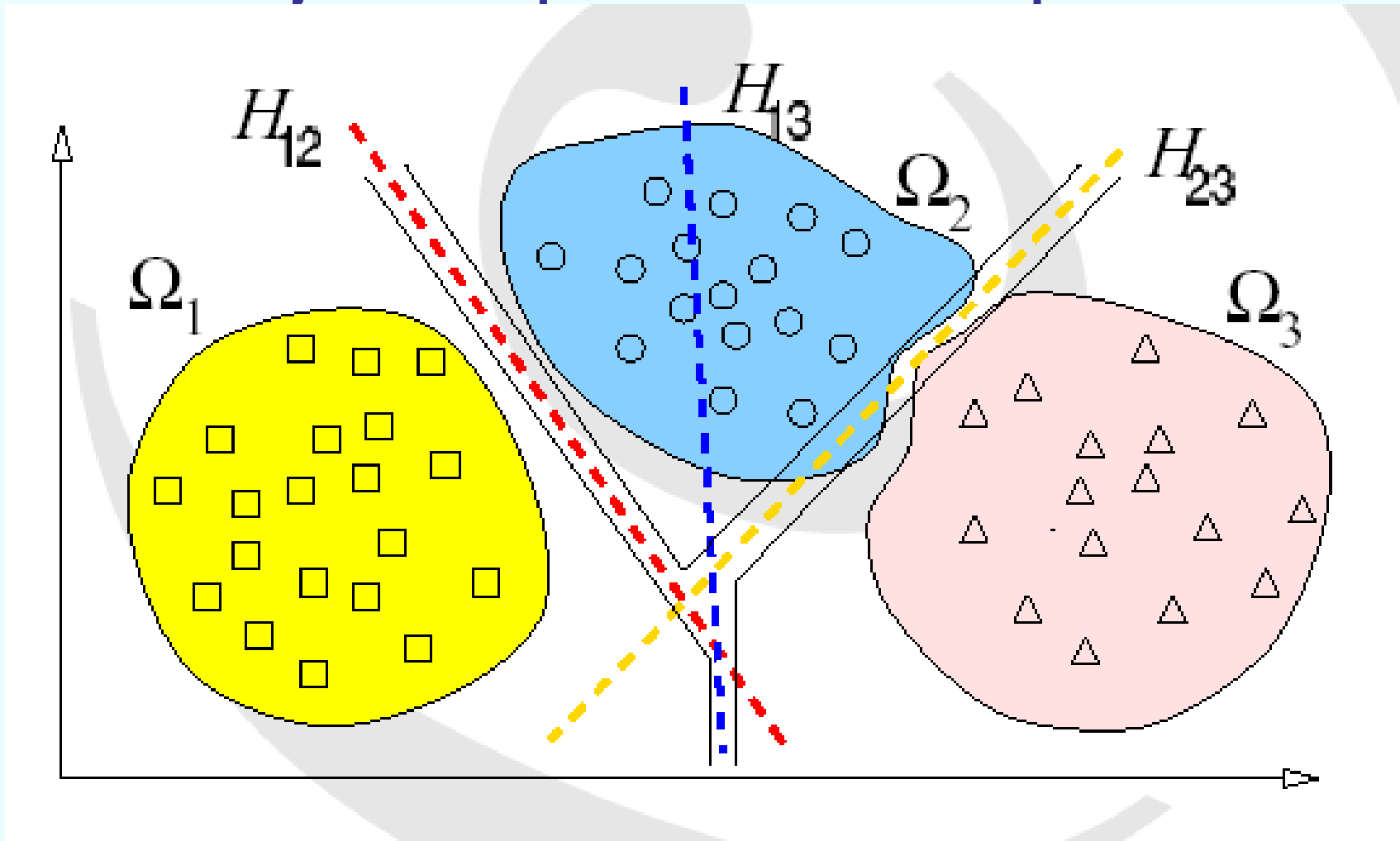


a) s rozdělujícími nadplochami

b) s obalovými třídami

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Určení rozdělujících nadploch v obrazovém prostoru



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Klasifikátor na principu kritéria minimální vzdálenosti

(porovnávání klasifikovaných obrazů se vzorovými obrazy – tzv. etalony)

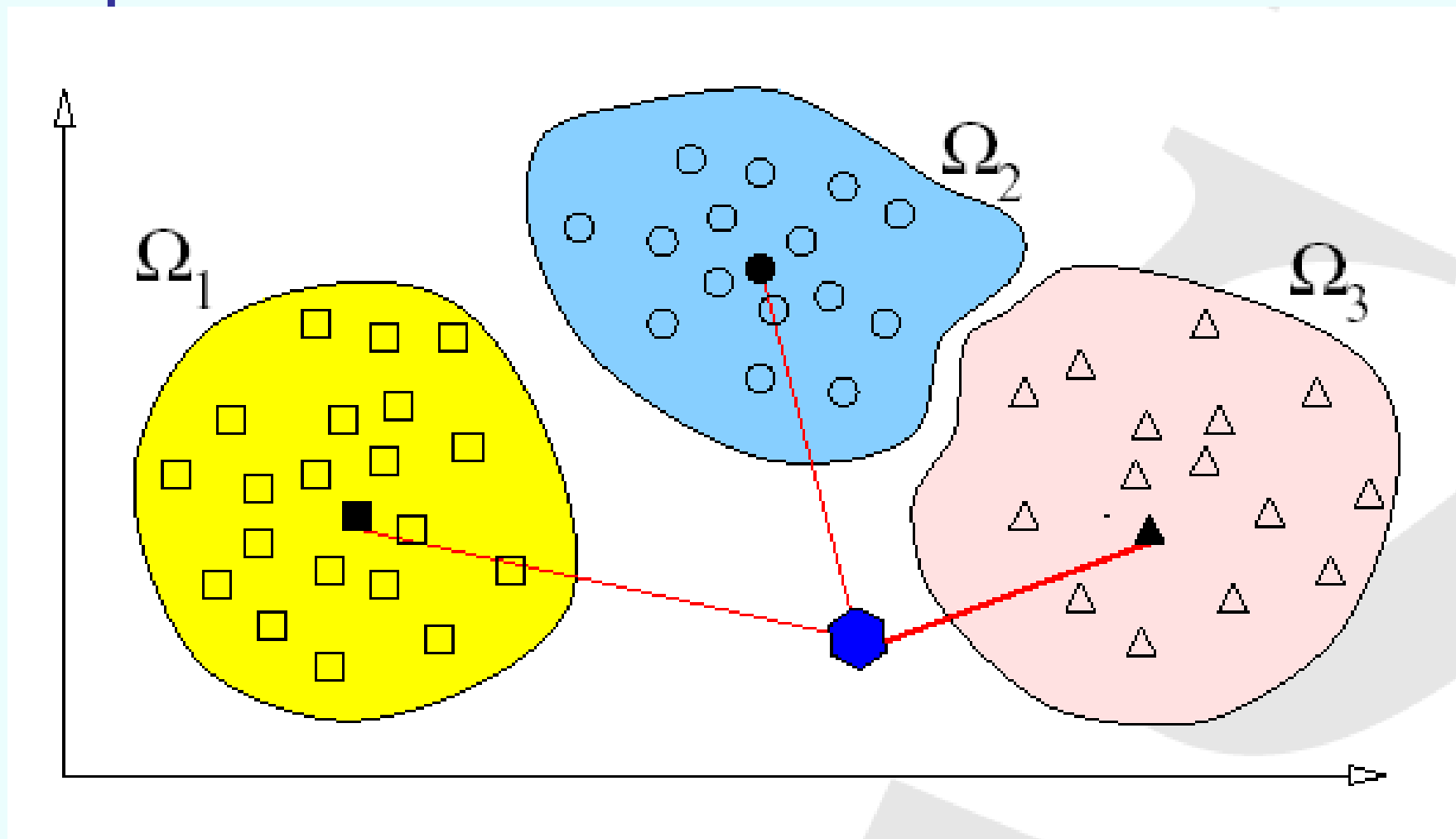
Lze použít v úlohách s oddělitelnými množinami obrazů (třídami) – ve fázi trénování se vytvoří vzorové obrazy (etalony) jednotlivých tříd – označme je \mathbf{e}_s , $s = 1, \dots, R$.

Neznámé obrazy pak klasifikujeme pravidlem

$$\omega_r = \|\mathbf{e}_r - \mathbf{x}\| = \min \|\mathbf{e}_s - \mathbf{x}\|, \quad s = 1, \dots, R$$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Princip:



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Odvození diskriminační funkce kritéria

(pro jednoduchost použijeme Euklidovskou vzdálenost)

$$\begin{aligned}\| \mathbf{e}_s - \mathbf{x} \| &= \sqrt{(\mathbf{e}_s - \mathbf{x})^T (\mathbf{e}_s - \mathbf{x})}, \quad s = 1, \dots, R \\ \| \mathbf{e}_s - \mathbf{x} \|^2 &= (\mathbf{e}_s - \mathbf{x})^T (\mathbf{e}_s - \mathbf{x}),\end{aligned}$$

hledáme

$$\min \| \mathbf{e}_s - \mathbf{x} \|^2 = \min (\mathbf{e}_s^T \mathbf{e}_s - 2\mathbf{e}_s^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{x}), \quad s = 1, \dots, R,$$

\mathbf{x} je pro všechny třídy týž, čili konstantní, takže

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2 \max (\mathbf{e}_s^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_s^T \mathbf{e}_s)$$

diskriminační funkce

$$\mathbf{g}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{s,0} + \mathbf{q}_s^T \mathbf{x} = \mathbf{e}_s^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_s^T \mathbf{e}_s \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{q}_{s,0} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_s^T \mathbf{e}_s = \frac{1}{2} \| \mathbf{e}_s \|^2 \quad \dots \text{„práh“}$$

$\mathbf{q}_s = \mathbf{e}_s \quad \Rightarrow$ hodnoty příznaků násobíme vzorovými obrazy
a hledáme $\max \mathbf{g}_s(\mathbf{x})$ pro všechna s

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Kritérium minimální chyby (Bayesův klasifikátor)

Pro úlohy s neoddělitelnými (prolínajícími se) třídami obrazů – příslušnost k třídě lze určit jen s určitou pravděpodobností:

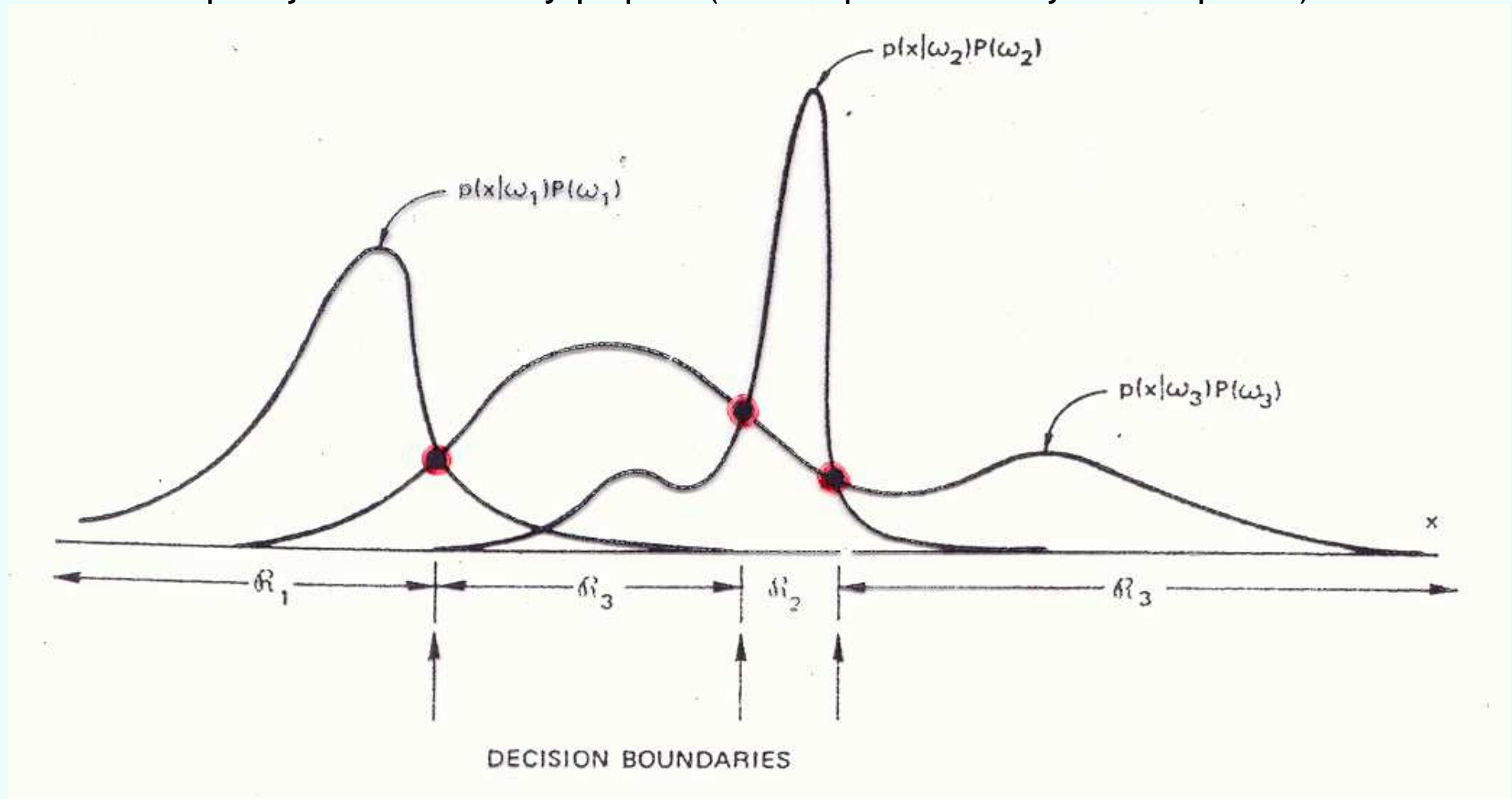
Kritérium minimální chyby využívá k popisu úlohy pravděpodobnostního zápisu. Potom hodnotu ω pokládáme za náhodnou proměnnou. Pokud bychom znali pouze hodnoty apriorních pravděpodobností $P(\omega_i)$, zařazovali bychom všechny obrazy do té třídy ω_r , která má nejvyšší apriorní pravděpodobnost $P(\omega_r)$. To by však bylo chybné. Pravděpodobnost této chyby můžeme vyjádřit jako $1 - P(\omega_r)$.

Většinou se nemusíme rozhodovat jen podle apriorních pravděpodobností tříd $P(\omega_i)$, ale máme k dispozici i hodnotu vektoru příznaků \mathbf{x} a všechny podmíněné hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(\mathbf{x} | \omega_r)$.

Tyto podmíněné hustoty pravděpodobnosti vyjadřují rozložení hodnot \mathbf{x} uvnitř jednotlivých tříd; získáme je trénováním klasifikátoru. Histogram četností výskytu jednotlivých obrazů uvnitř jedné třídy je dobrým odhadem hustoty pravděpodobnosti.

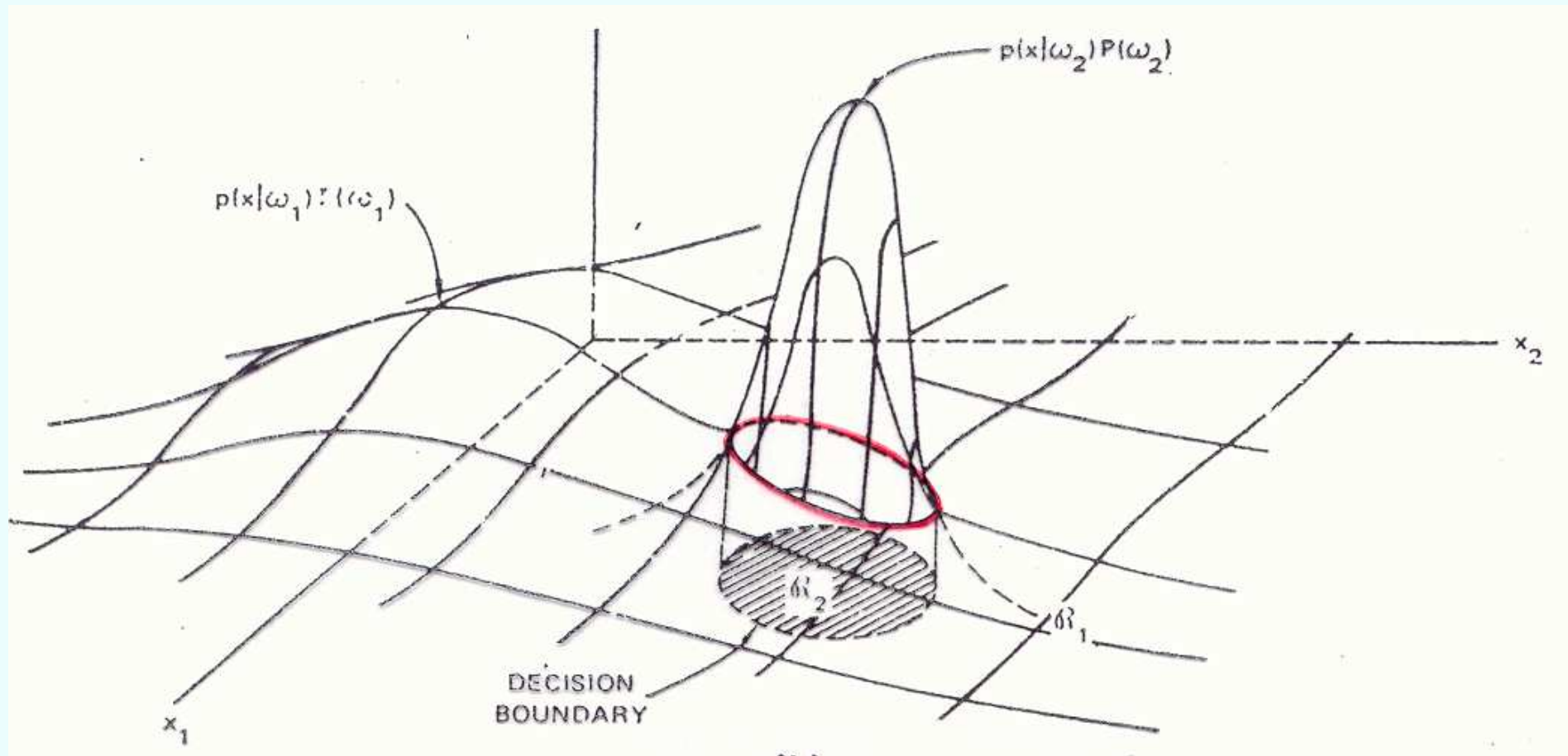
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příklad – pro jednorozměrný případ (vektor příznaků o jednom prvku):



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Dvourozměrný případ:



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

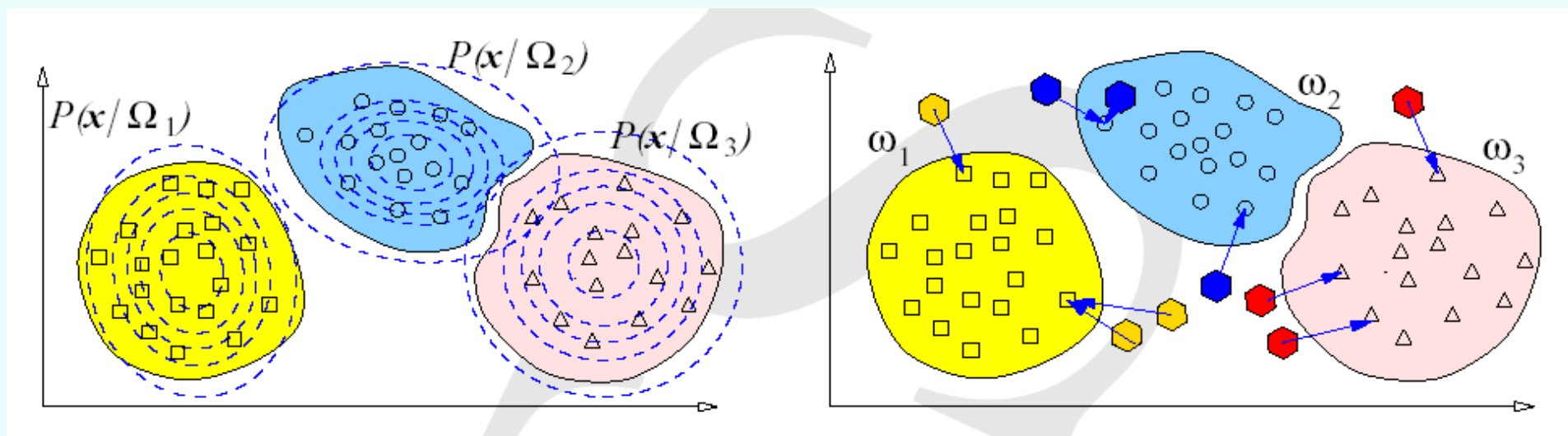
Pravděpodobnost (tzv. aposteriorní pravděpodobnost), že obraz \mathbf{x} přísluší do třídy s identifikátorem ω_r , je dána vztahem

$$P(\omega_s / x) = \frac{p(x / \omega_s) \cdot P(\omega_s)}{p(x)}, \quad p(x) = \sum_{i=1}^R p(x / \omega_i) \cdot P(\omega_i) .$$

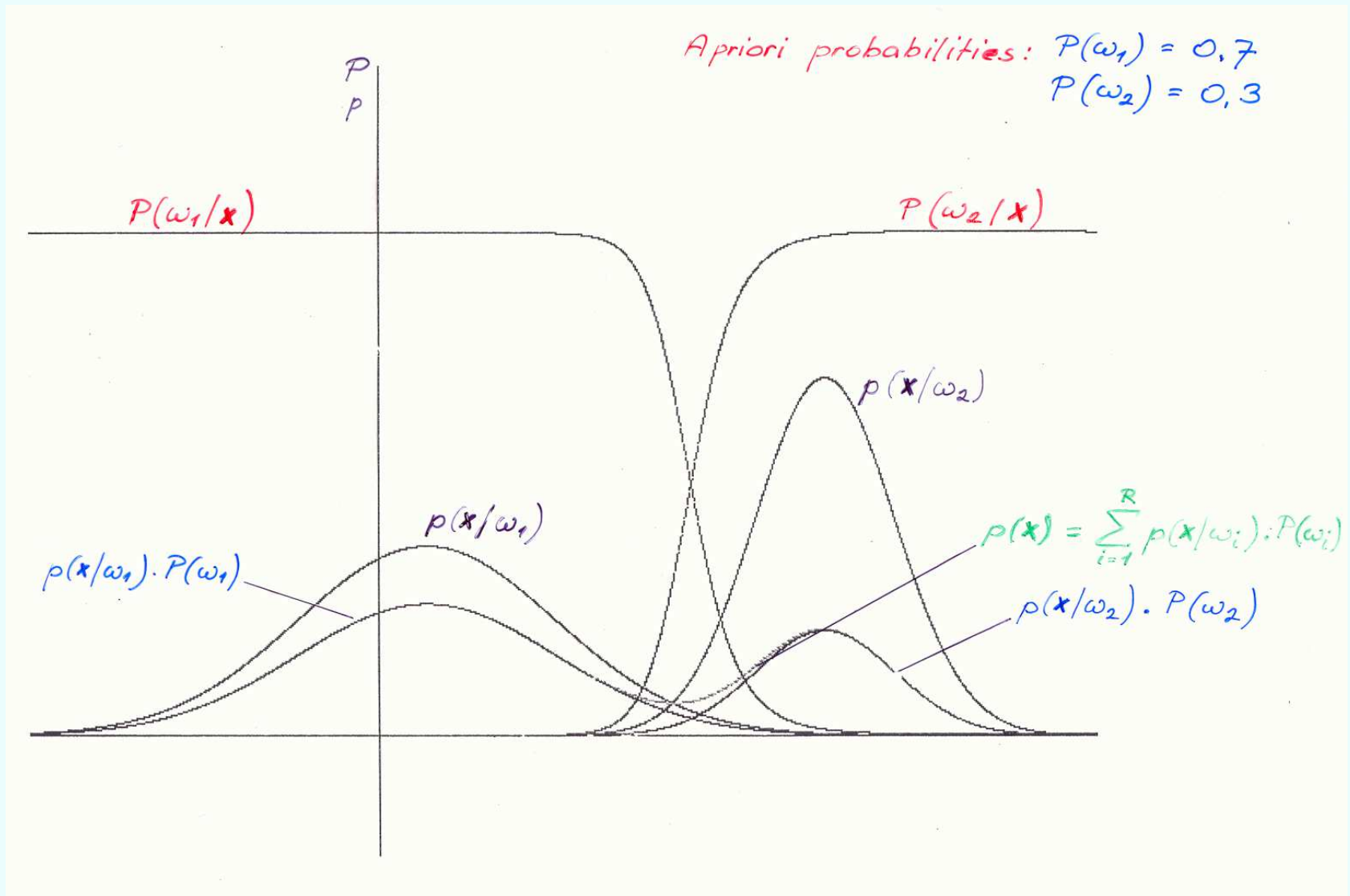
Rozhodovací pravidlo pro zařazení objektu do r -té třídy pak má tvar:

$$\omega_r = \max_{\forall s} (P(\omega_s / x)), \quad s = 1, \dots, R .$$

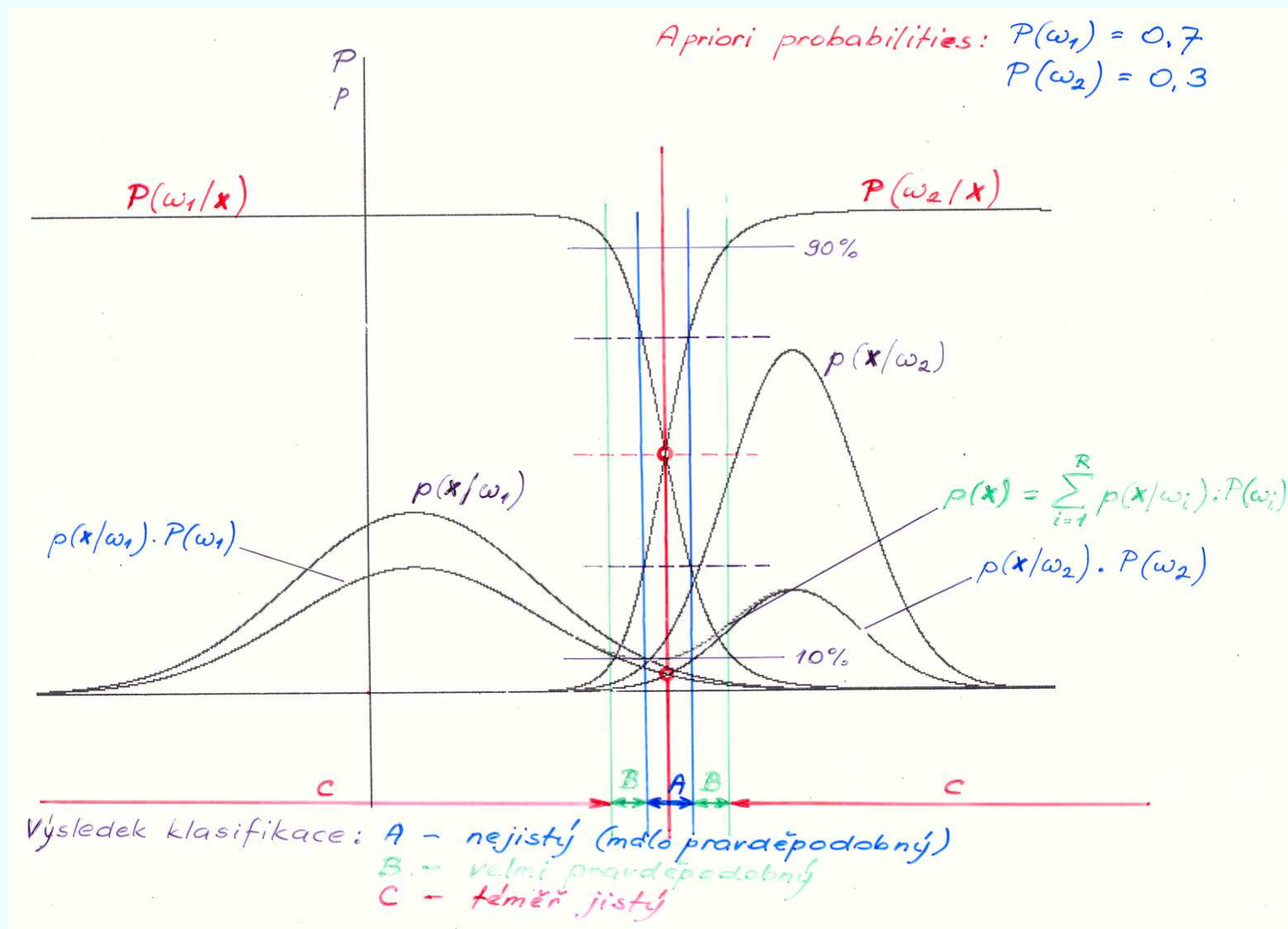
Ilustrace:



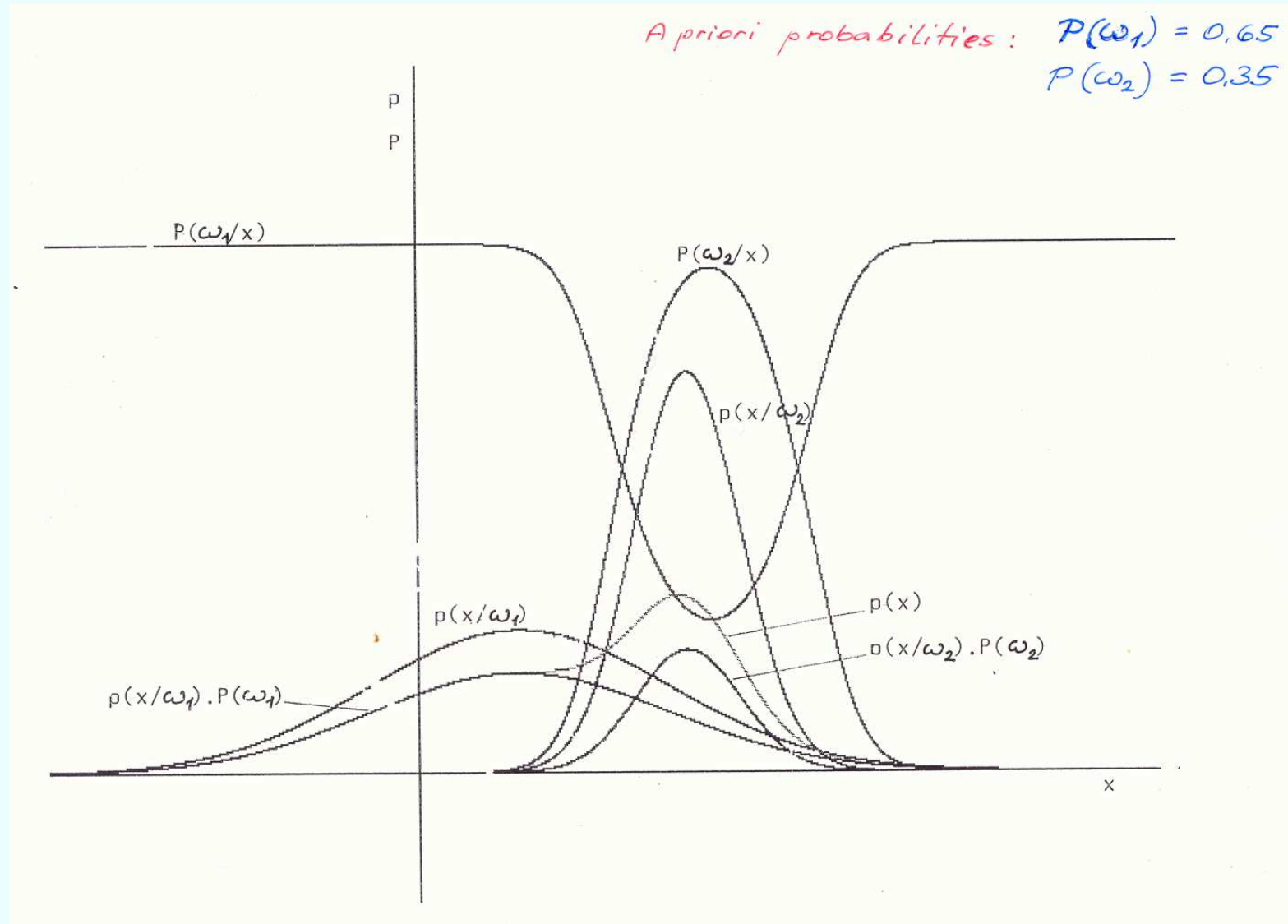
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Kritérium minimální chyby

The decision rule

$$\omega = d(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)$$

that gives the minimum mean loss $J(\mathbf{q})$ is called the optimum decision rule, and \mathbf{q}^* is called the vector of optimal parameters

$$J(\mathbf{q}^*) = \min_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}), \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \in D$$

The minimum error criterion (Bayes criterion, maximum likelihood) uses loss functions of the form $\lambda(\omega_r|\omega_s)$, where $\lambda(\cdot)$ is the number that describes quantitatively the loss incurred if a pattern \mathbf{x} which should be classified into the class ω_s is incorrectly classified into the class ω_r

$$\omega_r = d(\mathbf{x}, \mathbf{q})$$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

The mean loss is

$$J(\mathbf{q}) = \int_X \sum_{s=1}^R \lambda(d(\mathbf{x}, \mathbf{q})|\omega_s) p(\mathbf{x}|\omega_s) P(\omega_s) d\mathbf{x}$$

where $P(\omega_s)$, $s = 1, \dots, R$ are the a priori probabilities of classes, and $p(\mathbf{x}|\omega_s)$, $s = 1, \dots, R$ are the conditional probability densities of objects \mathbf{x} in the class ω_s .

$$\begin{aligned} \lambda(\omega_r|\omega_s) &= 0 \text{ for } r = s \\ &= 1 \text{ for } r \neq s \end{aligned}$$

and the discrimination functions are

$$g_r(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\omega_r)P(\omega_r), \quad r = 1, \dots, R$$

where $g_r(\mathbf{x})$ corresponds (up to a multiplicative constant) to the value of the a posteriori probability $P(\omega_r|\mathbf{x})$.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Výpočet aposteriorních pravděpodobností

$$P(\omega_r|\mathbf{x}) = \max_{s=1,\dots,R} P(\omega_s|\mathbf{x})$$

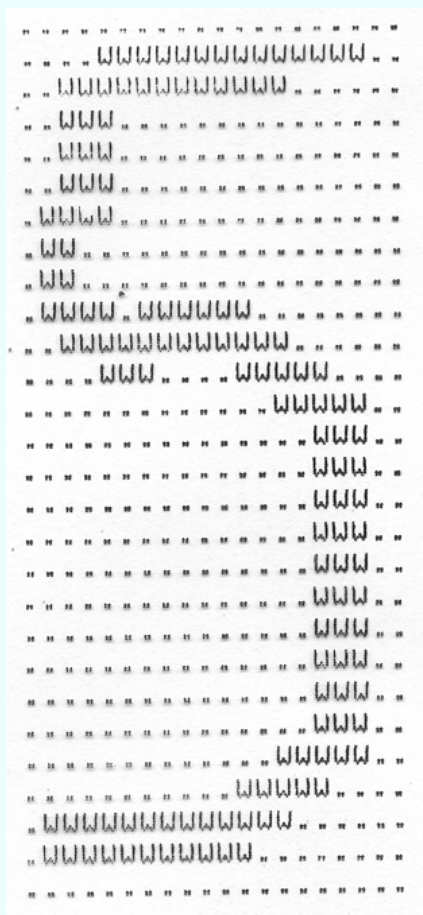
A posteriori probability may be computed from a priori probabilities using the Bayes formula

$$P(\omega_s|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\omega_s)P(\omega_s)}{p(\mathbf{x})}$$

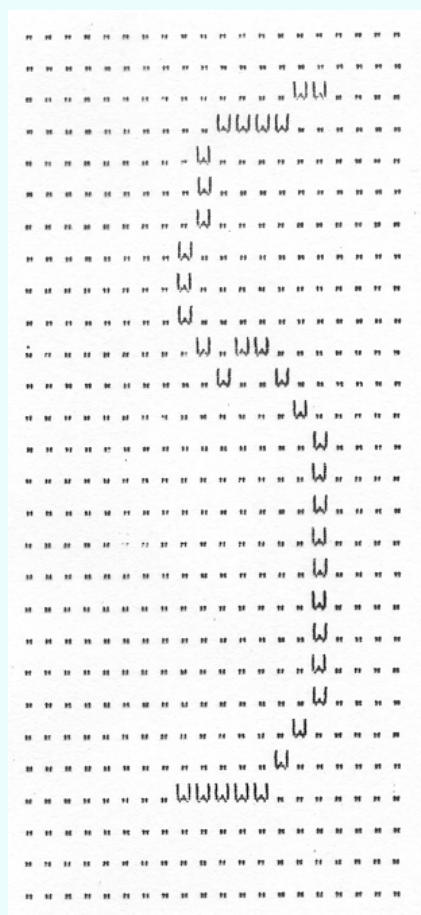
where $p(\mathbf{x})$ is the mixture density.

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

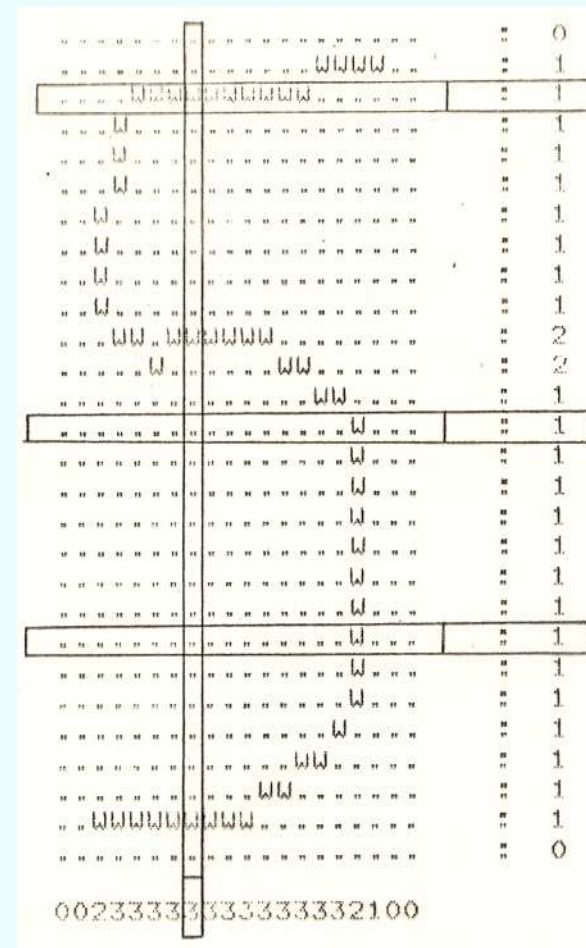
Příklad příznakového rozpoznávání číslic:



sejmutý znak



skelet znaku



extrakce příznaků

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Výsledek
rozpoznávání:

.....	0
.....WWW.....	1
.....WWW.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....WWW.....	2
.....W.....	2
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....W.....	1
.....WWW.....	1
.....	0

0023333333333332100

JEDNA SE 0 ZNAKJ: 5
SPRAVNE ? (Y/N): Y
POUZITE RADKY: 3 , 14 , 21 , POUZITE SLOUPCE: 8 ,

Strukturní metody rozpoznávání

Strukturní popisy rozpoznávaných objektů

- primitiva
- vlastnosti primitiv
- relace mezi primitivy – prostorové
 - časové
 - funkční

Vytvořený symbolický popis – **obraz** vystihuje (popisuje) **strukturní vlastnosti objektu** .

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Jako strukturní popisy (obrazy) lze použít:

- řetězec symbolů označujících primitiva
- relační struktura
- graf (obecný, speciální, ...)

Strukturní popisy objektů (= slova) příslušejících do téže třídy tvoří **jazyk** třídy.

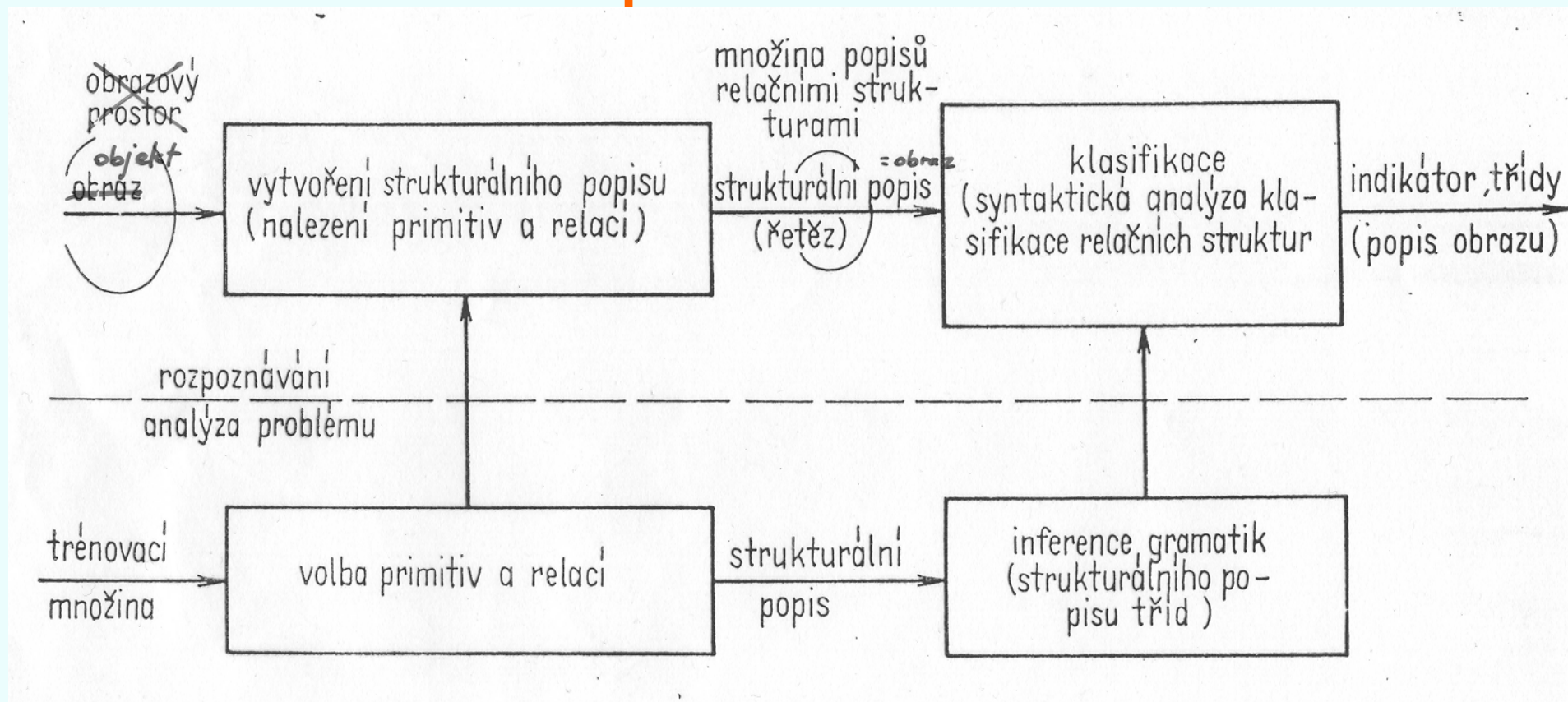
Rozpoznávání strukturně popsaných objektů = rozhodnutí, zda vytvořený strukturní popis objektu (slovo) **je slovem** (frází) **jazyka příslušné třídy**.

Výhody strukturních metod rozpoznávání:

- invariantní na pozici a natočení obrazu,
- méně složité popisy u složitých objektů

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Úloha strukturního rozpoznávání



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Slovní formulace:

Algoritmus 7.3 - Syntaktické rozpoznávání

Fáze učení

- (1) Na základě analýzy úlohy definujte primitiva a jejich vzájemné relace.
- (2) Analýzou syntaktických popisů předmětů jednotlivých tříd případně odvozováním (inferencí) (odstavec 7.2.3) sestrojte gramatiku reprezentující každou třídu.

Fáze rozpoznávání

- (3) Při rozpoznávání, do které třídy předmět náleží, extrahujte nejprve jeho primitiva, určete jejich druh a vzájemné relace. Sestrojte slovo reprezentující popisovaný předmět.
- (4) Na základě výsledku syntaktické analýzy zařaďte předmět do té třídy, jejíž gramatika (sestrojená v kroku (2)) dané slovo generuje.

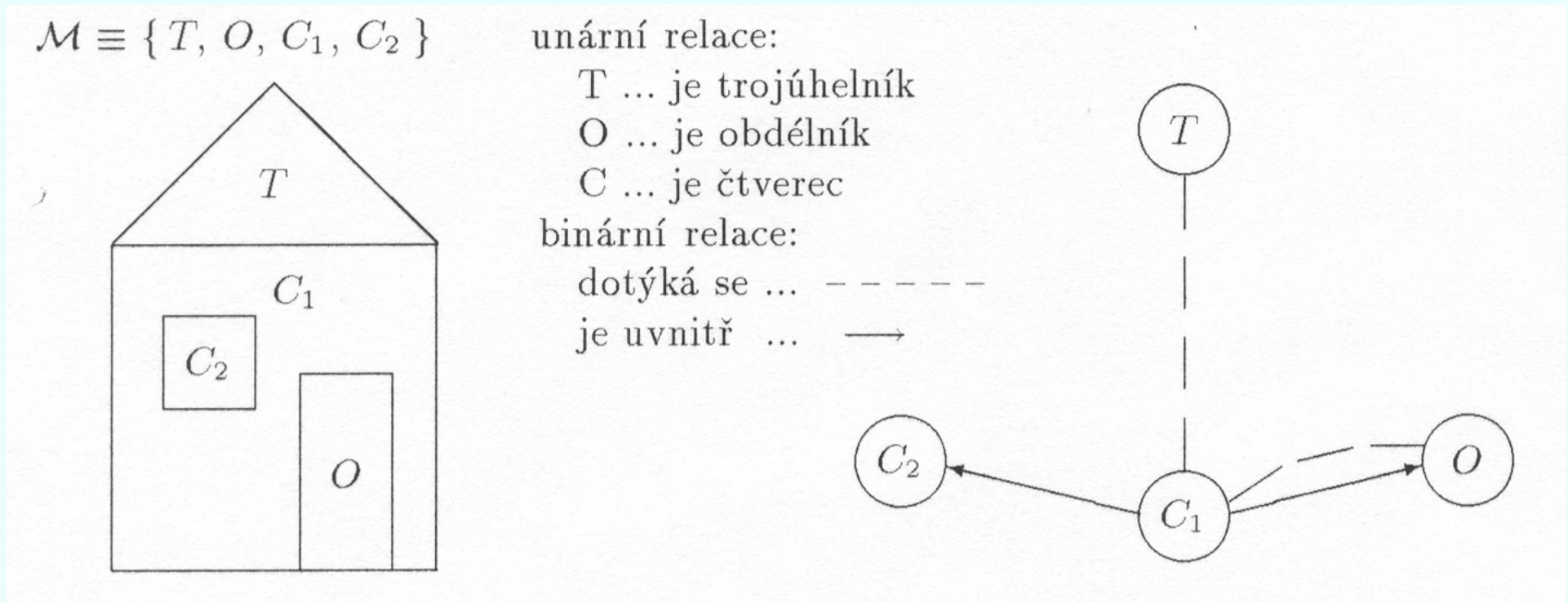
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Jak postupovat při vytváření strukturních popisů:

1. nalézt všechna **primitiva** a přiřadit jim prvky nosiče struktury;
2. každému prvku struktury přiřadit **vlastnost** (unární relaci) označenou jménem (symbolem) odpovídajícího primitiva;
3. určit **vztahy mezi primitivy** (binární relace), čímž vytvoříme **relační strukturu**;
4. doplnit případnou informaci číselné povahy (vytvoříme **sémantickou informaci**, popř. sémantický vektor).

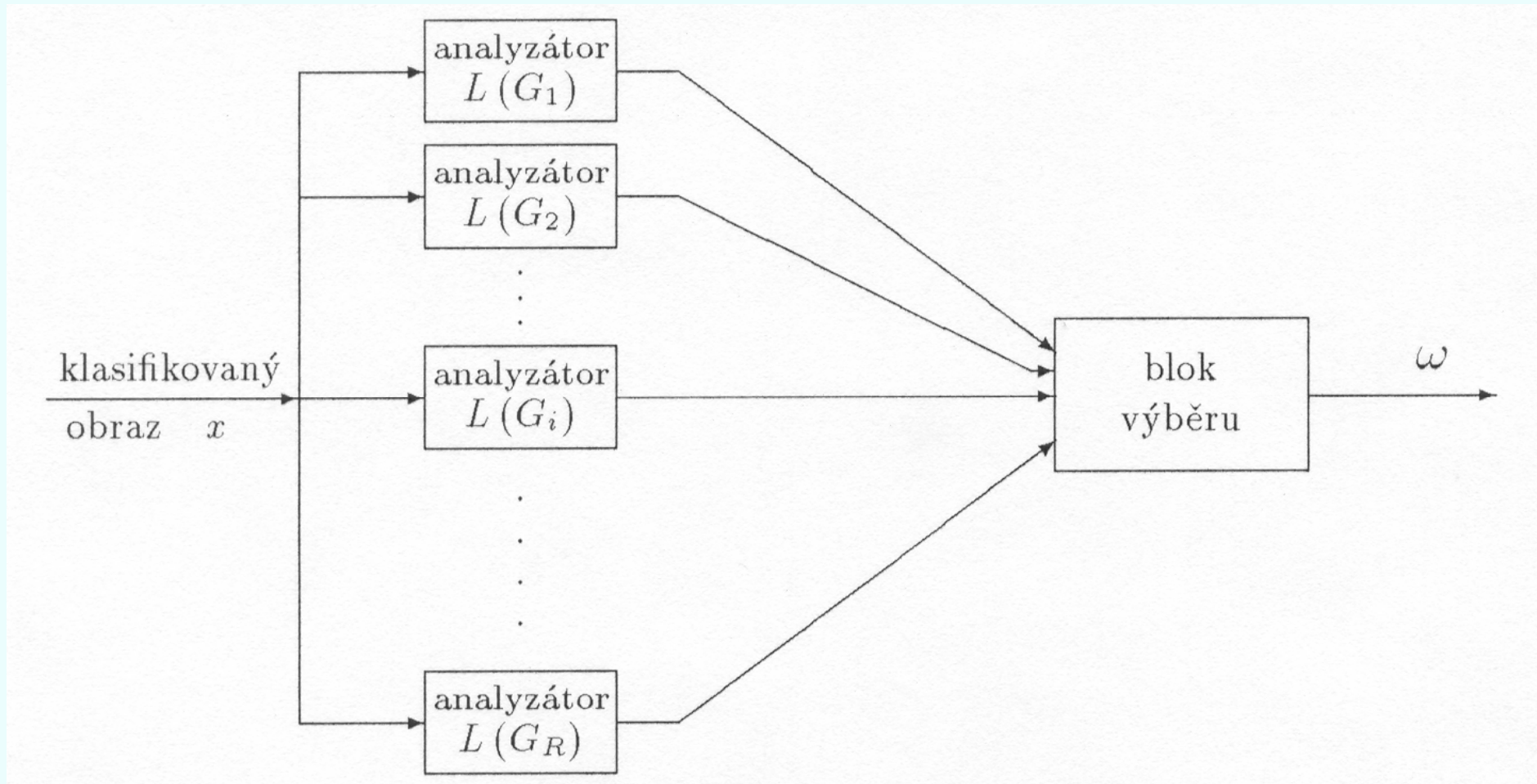
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Vytváření popisné relační struktury (strukturního obrazu)



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Struktura klasifikátoru



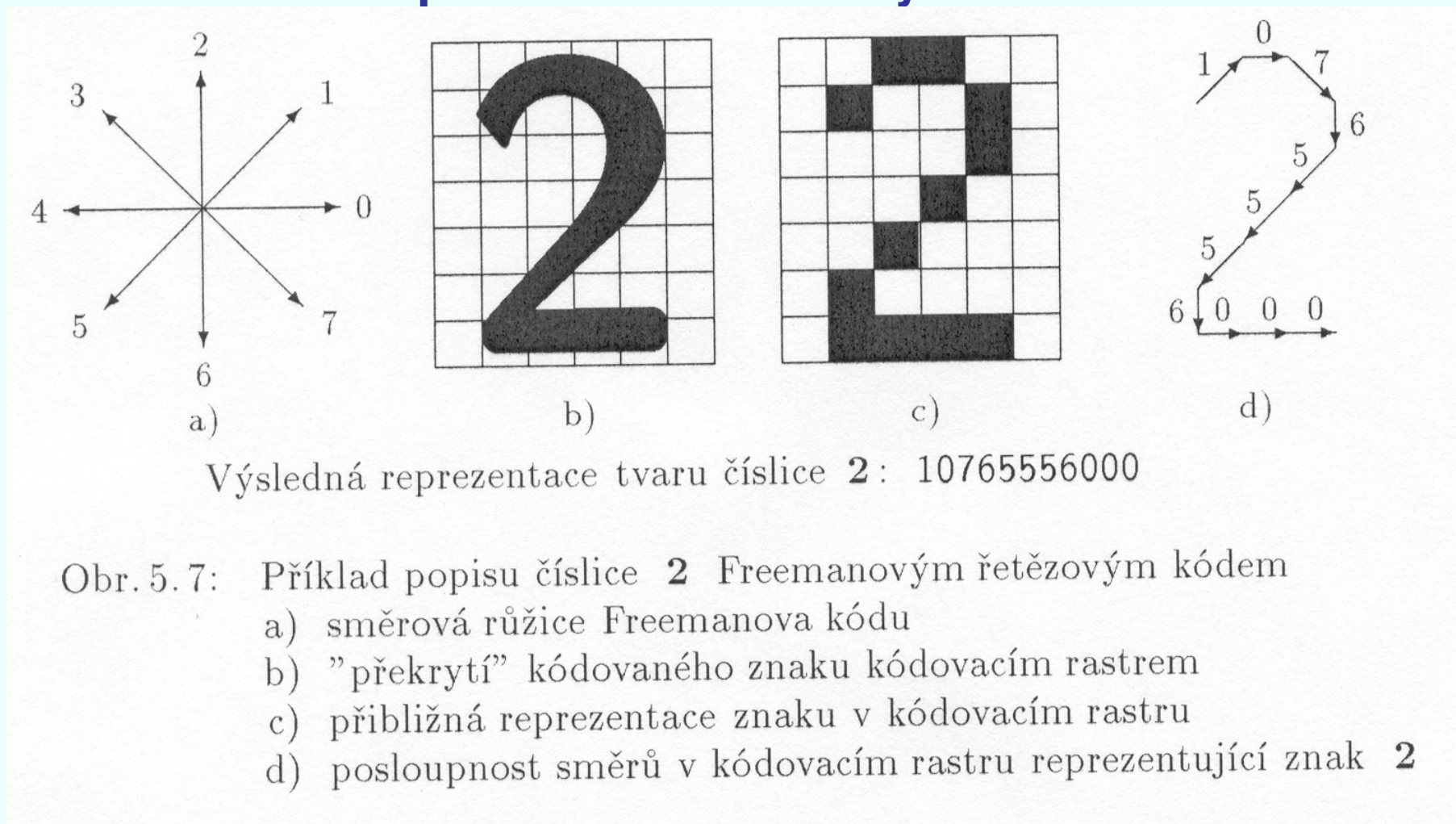
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Extrakce primitiv, vytváření strukturních obrazů

1. **Počet** typů (druhů) primitiv i relací (vztahů) mezi nimi by měl být **co nejmenší** .
2. **Primitiva** by měla **odpovídat** základním (přirozeným) **strukturním elementům** objektu, jimiž lze objekt vyčerpávajícím způsobem popsat; přitom primitiva musejí být snadno **extrahovatelná** a **klasifikovatelná** (nejčastěji některou příznakovou metodou).
3. **Nalezení** (určení) **primitiv** a **relací** mezi nimi (způsob nalezení, algoritmus, ...) by mělo být **algoritmicky co nejjednodušší**.

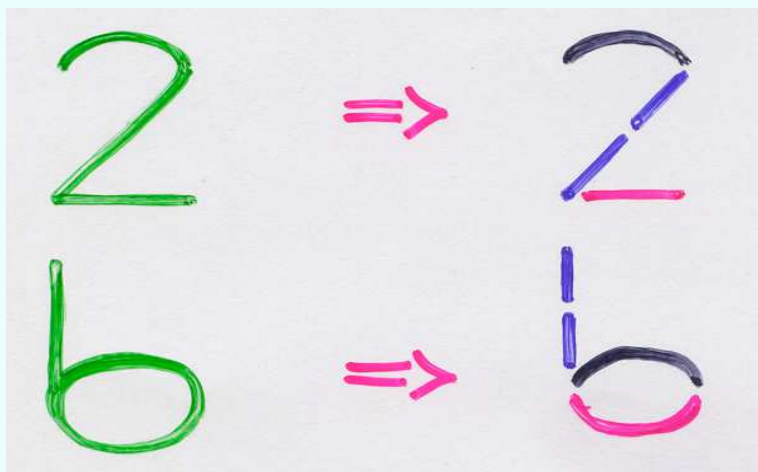
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příklad extrakce primitiv Freemanovým kódem



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Vytvoření strukturního popisu



Definujeme primitiva

primitivum	/		—	\	()	⤴	⤵
označení	A	B	C	D	E	F	G	H

Strukturní popisy:

2: GAAC

6: BBHG (BBGH)

Definujeme primitiva

primitivum	/		—	\	⤴	⤵	⤶	⤷
označení	A	B	C	D	E	F	G	H

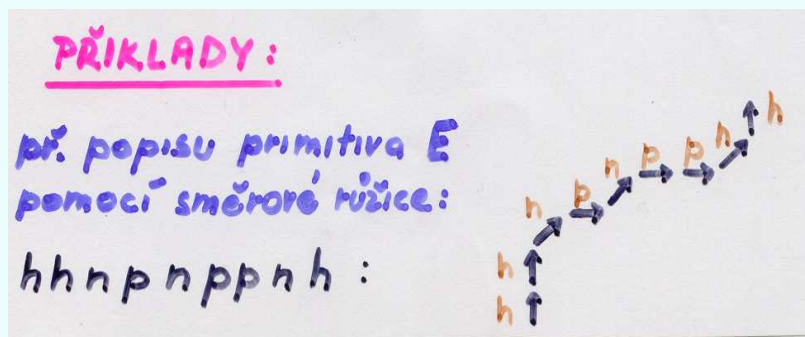
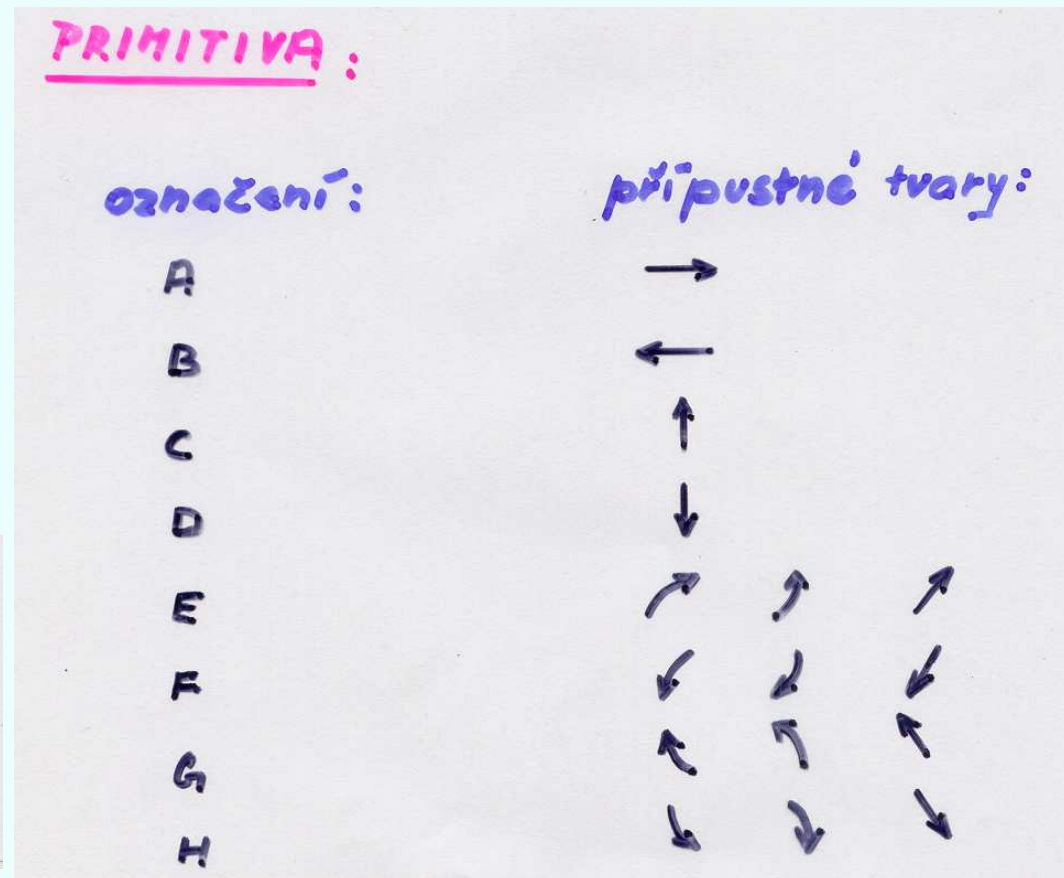
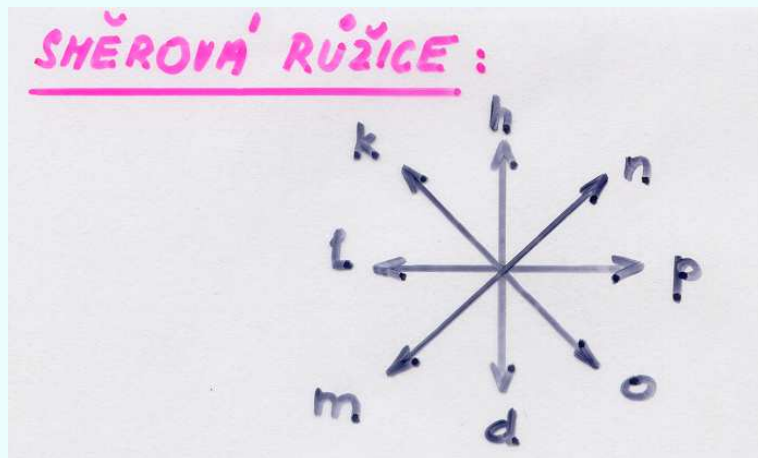
Strukturní popisy:

2: EFAAACC

6: BBBGHFE (BBBEFHG)

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Praktický příklad extrakce primitiv

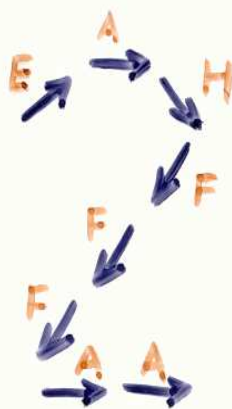


4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Strukturní popisy (obrazy) číslic 2 a 6 :

*př. popisu číslice 2
pomocí primitiv :*

EAHFFFAA:

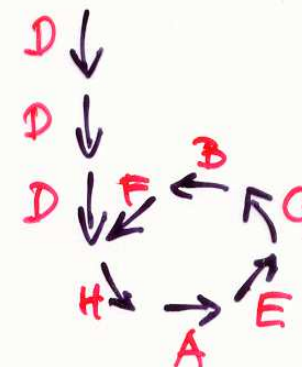
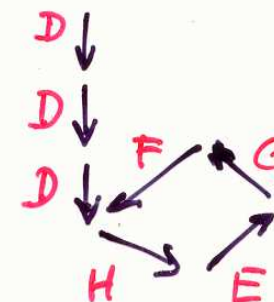


Číslice 6:

DDDHEGF

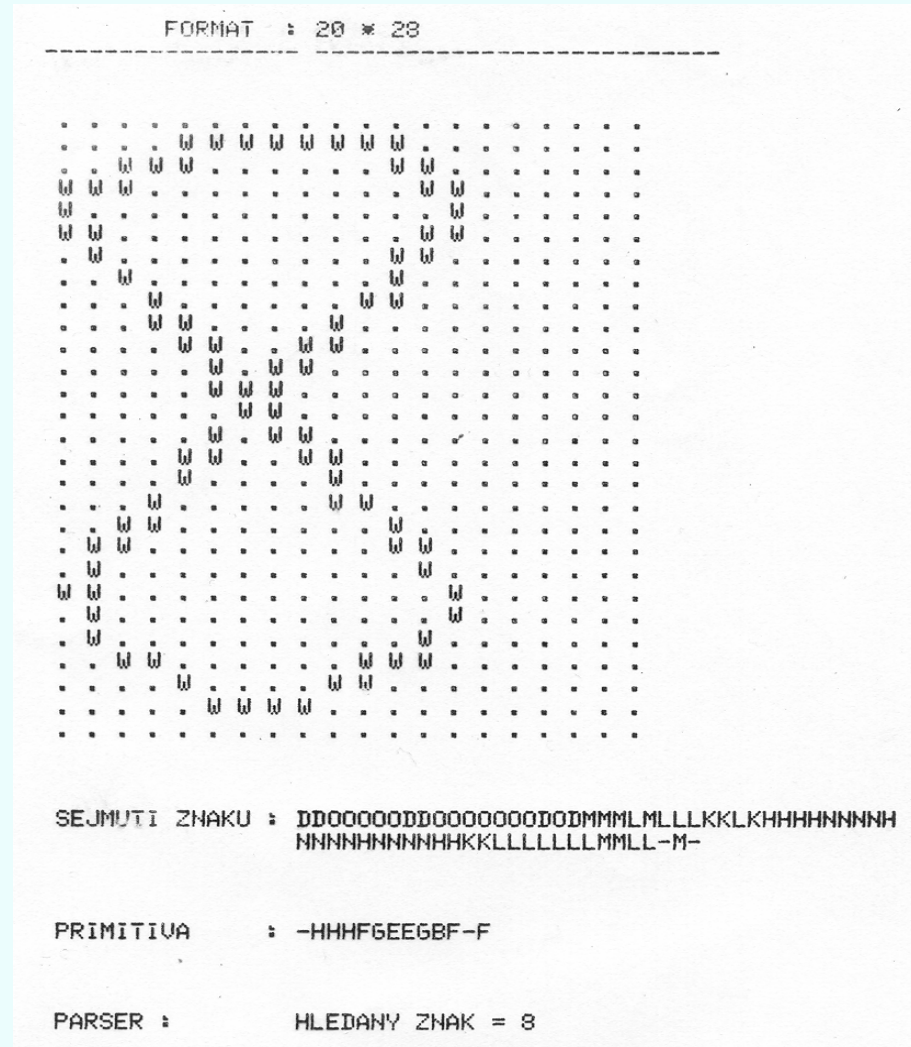
nebo

DDDAEGBF



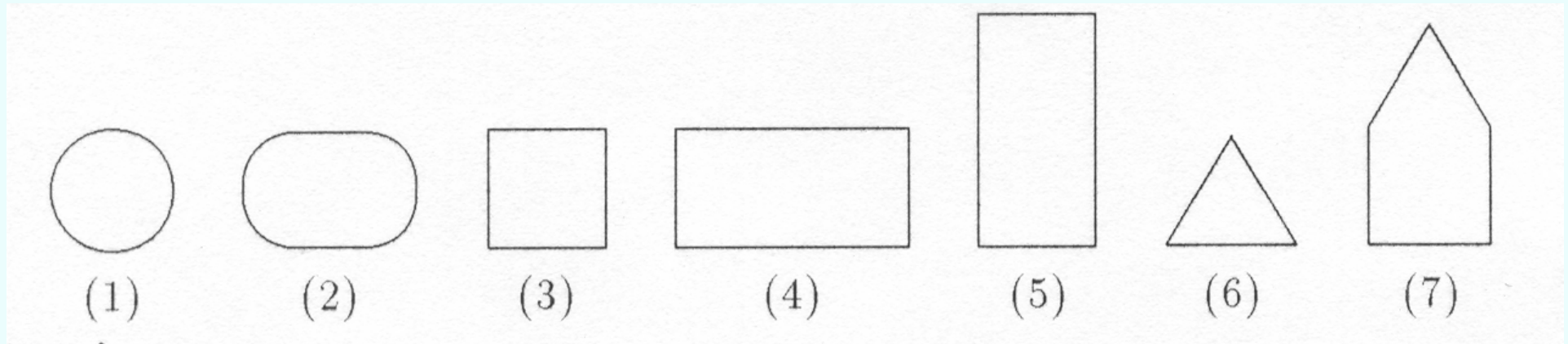
4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Totéž pro číslici „8“:



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Strukturní rozpoznávání geometrických objektů



primitivum	—		/	\	()
symb. označení	a	b	c	d	e	f

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Gramatiky

a

strukturní popisy objektů

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle V_{N1}, V_{T1}, S_1, R_1 \rangle & G_2 &= \langle V_{N2}, V_{T2}, S_2, R_2 \rangle \\ V_{N1} &\equiv \{S_1, X_1, Y_1\} & V_{N2} &\equiv \{S_2, X_2, Y_2, Z\} \\ V_{T1} &\equiv \{e, f\} & V_{T2} &\equiv \{a, e, f\} \\ R_1 &\equiv \{S_1 \rightarrow X_1 Y_1, & R_2 &\equiv \{S_2 \rightarrow X_2 Y_2, X_2 \rightarrow eZ, \\ & X_1 \rightarrow e, Y_1 \rightarrow f\} & & Y_2 \rightarrow fZ, Z \rightarrow aZ|a\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3 &= \langle V_{N3}, V_{T3}, S_3, R_3 \rangle & G_4 &= \langle V_{N4}, V_{T4}, S_4, R_4 \rangle \\ V_{N3} &\equiv \{S_3, X_3, Y_3\} & V_{N4} &\equiv \{S_4, X_4, Y_4\} \\ V_{T3} &\equiv \{a, b\} & V_{T4} &\equiv \{a, b\} \\ R_3 &\equiv \{S_3 \rightarrow (X_3 Y_3)^2, & R_4 &\equiv \{S_4 \rightarrow (X_4 Y_4)^2, \\ & X_3 \rightarrow b, Y_3 \rightarrow a\} & & X_4 \rightarrow b, Y_4 \rightarrow aY_4|a\} \end{aligned}$$

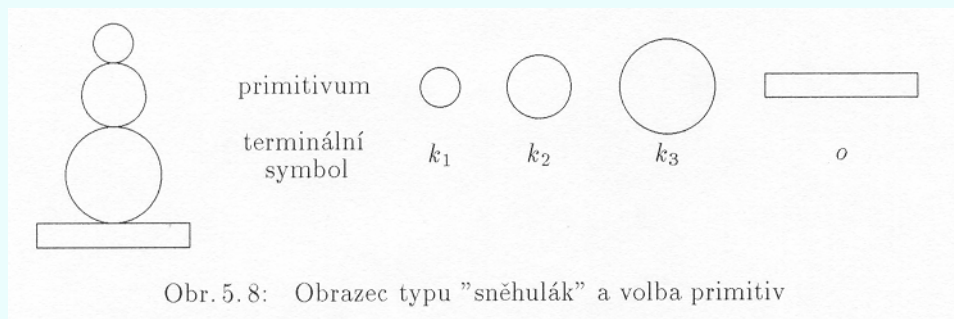
$$\begin{aligned} G_5 &= \langle V_{N5}, V_{T5}, S_5, R_5 \rangle & G_6 &= \langle V_{N6}, V_{T6}, S_6, R_6 \rangle \\ V_{N5} &\equiv \{S_5, X_5, Y_5\} & V_{N6} &\equiv \{S_6, X_6\} \\ V_{T5} &\equiv \{a, b\} & V_{T6} &\equiv \{a, c, d\} \\ R_5 &\equiv \{S_5 \rightarrow (X_5 Y_5)^2, & R_6 &\equiv \{S_6 \rightarrow cX_6 d, \\ & X_5 \rightarrow bX_4|b, Y_5 \rightarrow a\} & & X_6 \rightarrow a\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_7 &= \langle V_{N7}, V_{T7}, S_7, R_7 \rangle \\ V_{N7} &\equiv \{S_7, X_7, Y_7\} \\ V_{T7} &\equiv \{a, b, c, d\} \\ R_7 &\equiv \{S_7 \rightarrow cX_1 d, \\ & X_7 \rightarrow Y_7 a Y_7, Y_7 \rightarrow b Y_7 | b\} \end{aligned}$$

- (1) ef
- (2) eafa, resp. eafaa ... $e(a)^n f(a)^n$
- (3) baba
- (4) baabaa, resp. baaabaaa ... $b(a)^n b(a)^n$
- (5) bbabba, resp. bbbabbbba ... $(b)^n a(b)^n a$
- (6) cad
- (7) cbabd, resp. cbbabbd ... $c(b)^n a(b)^n d$

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Strukturní rozpoznávání s využitím sémantické informace



Obr. 5. 8: Obrazec typu "sněhulák" a volba primitiv

Strukturní popis:

$k_1 k_2 k_3 o$

„klasická“ regulární gramatika:

$$G_{sněh} = \langle V_{N_{sněh}}, V_{T_{sněh}}, S, R_{sněh} \rangle ,$$

kde

$$V_{N_{sněh}} \equiv \{ S, A, B, C \} ,$$

$$V_{T_{sněh}} \equiv \{ k_1, k_2, k_3, o \} ,$$

$$R_{sněh} \equiv \{ S \rightarrow k_1 A, A \rightarrow k_2 B, B \rightarrow k_3 C, C \rightarrow o \} .$$

Využijeme-li atributovou regulární gramatiku, dostaneme:

$$k_{(6)} k_{(8)} k_{(10)} o .$$

Třidu "sněhuláků" lze pak reprezentovat atributovou regulární gramatikou

$$G_{a_sněh} = \langle V_{N_{a_sněh}}, V_{T_{a_sněh}}, S, R_{a_sněh}, C_{a_sněh}, P_{a_sněh}, \mathbf{v} \rangle ,$$

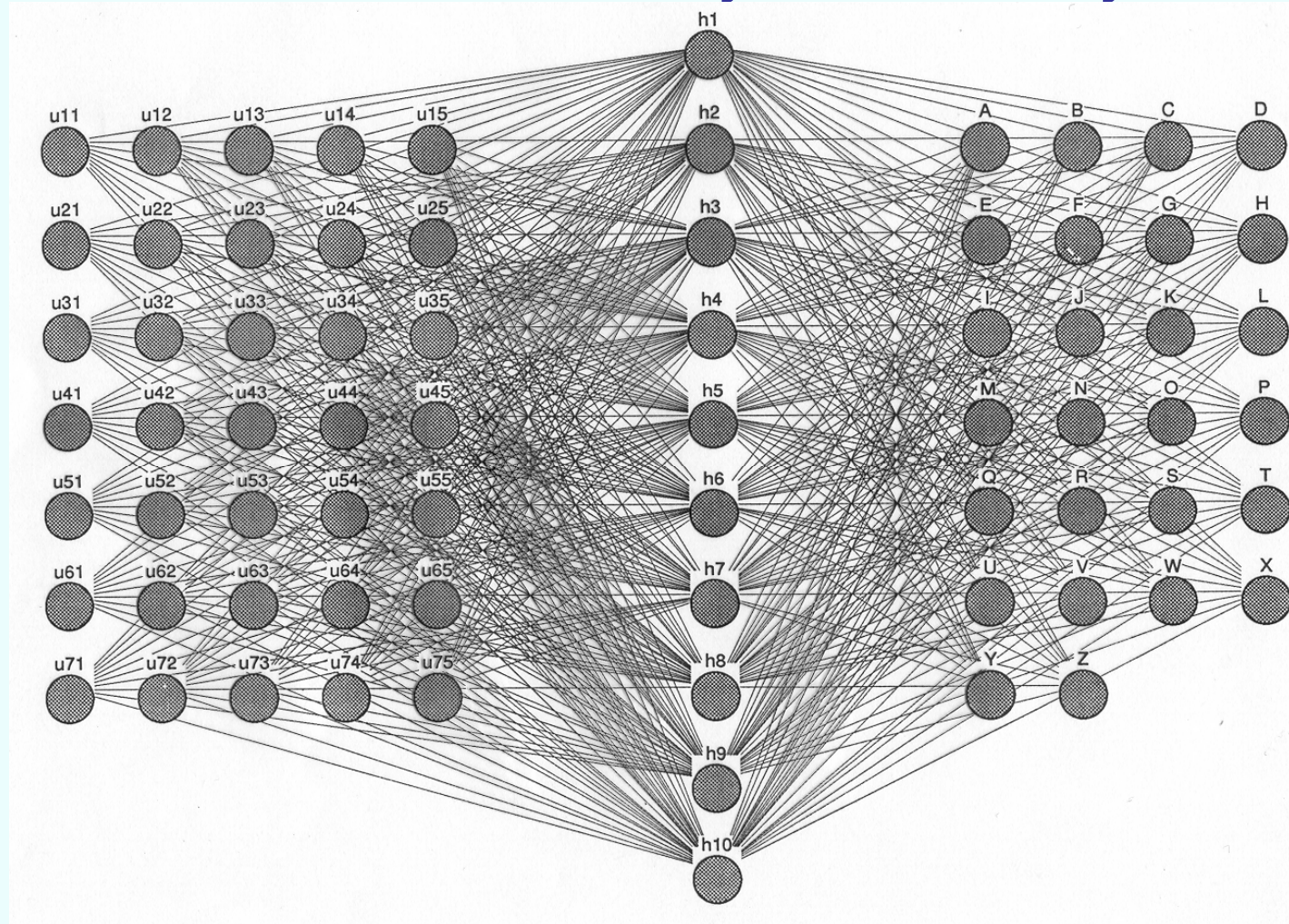
kde $V_{N_{a_sněh}} \equiv \{ S, A \}$, $V_{T_{a_sněh}} \equiv \{ k, o \}$,

vektor \mathbf{v} obsahuje jediný parametr v_1 označující poloměr koule a množina přepisovacích pravidel bude ve tvaru

$R_{a_sněh} :$	r_i	$C_{a_sněh}$	$P_{a_sněh}$
	$S \rightarrow k A$		$v_1 = 0$
	$A \rightarrow k A$	$par \geq v_1$	$v_1 = par$
	$A \rightarrow o$		

4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Příklad klasifikace znaků umělými neuronovými sítěmi



4. Klasifikace, rozpoznávání a shlukování

Klasifikace znaku M:

