Přejímky srovnáváním – příklad

Vlastní testování vypadá tak, že se vybere n předmětů dodávky a zjistí se počet vadných c (srovnáváním, prohlídkou, nějakým kvalitativním testem, …). Proti předchozí úloze se zde zjišťuje pouze fakt existence vady (může se jednat i pouze o jev, nikoliv „spojitou“ náhodnou proměnnou), nikoliv její nějaký rozměr. Pokud je $c > c_0$ dodávka je odmítnuta, pokud $c \le c_0$ dodávka je převzata.

Opět jsou známy následující hodnoty:

p_1 znamená přijatelný podíl vadných v dodávce (Acceptable Quality Level = **AQL**),

p_2 nepřijatelný podíl (Reject Quality Level = **RQL**), proto je přijatelný předpoklad $p_1 < p_2$

α reprezentuje **riziko dodavatele** (je to pravděpodobnost zamítnutí dodávky, pokud je v pořádku = přijatelný podíl vadných je rovný nebo pod AQL).

β reprezentuje **riziko odběratele** (β je pravděpodobnost přijetí dodávky, pokud není v pořádku = přijatelný podíl vadných je rovný nebo nad RQL).

Pak analogicky předchozímu případu by mělo platit: $P(c > c_0 / p_1) = \alpha$, $P(c \le c_0 / p_2) = \beta$. To však nemusí (a ani většinou nebude) mít řešení. V tomto případě pracujeme s diskrétními pravděpodobnostmi. Proto drobná modifikace $P(c > c_0 / p_1) \le \alpha$, $P(c \le c_0 / p_2) \le \beta$. Za těchto specifikací je přejímací plán dán dvojicí: n, c_0.

$P(c > c_0 / p_1) = \sum_{c=c_0+1}^{n} \binom{n}{c} p_1^{\,c} (1-p_1)^{n-c}$ a $P(c \le c_0 / p_2) = \sum_{c=0}^{c_0} \binom{n}{c} p_2^{\,c} (1-p_2)^{n-c}$. Nalézt přejímací plán znamená řešit soustavu nerovností vůči n, c_0:

$$\sum_{c=c_0+1}^{n} \binom{n}{c} p_1^{\,c} (1-p_1)^{n-c} \le \alpha \quad \text{a} \quad \sum_{c=0}^{c_0} \binom{n}{c} p_2^{\,c} (1-p_2)^{n-c} \le \beta$$

Z podmínky efektivity testování (= požadujeme nejmenší počet testů) = hledáme takové nejmenší n, ke kterému lze nalézt c_0 splňující obě nerovnosti, plyne iterační postup. Zvolíme nějaké dostatečně malé n, prověříme, zda lze k tomuto n nalézt c_0 splňující obě nerovnosti. Pokud takové existuje, snížíme n o jednotku, pokud ne, zvýšíme n o jednotku a prověrku na existenci opakujeme. Postup se opakuje tak dlouho až bude nalezeno nejmenší n a k němu jeho odpovídající c_0.

Námět: Bude takový proces konvergovat vždy nebo jsou pro konvergenci nějaká omezení?

Námět: Bude k nalezenému n existovat právě jedno c_0 nebo jich může být více?

Detaily a modifikace takových testů lze nalézt v: Douglas C. Montgomery: Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. John Wiley & Sons, August 2004, str. 645-687.

Námět: Diskutujte souvislost s testováním hypotéz.

Poznámka: Pro výpočet $\sum_{c=0}^{c_0}\binom{n}{c}p_2^{\,c}(1-p_2)^{n-c}$ lze použít distribuční funkce F-rozdělení, protože platí

$\sum_{c=0}^{c_0}\binom{n}{c}p_2^{\,c}(1-p_2)^{n-c} = F_{F(2(n-c_0),2(c_0+1))}\left(\frac{c_0+1}{n-c_0}\frac{1-p_2}{p_2}\right)$, obdobně pro výpočet

$$\sum_{c=c_0+1}^{n}\binom{n}{c}p_1^{\,c}(1-p_1)^{n-c} = 1-\sum_{c=0}^{c_0}\binom{n}{c}p_1^{\,c}(1-p_1)^{n-c} = 1-F_{F(2(n-c_0),2(c_0+1))}\left(\frac{c_0+1}{n-c_0}\frac{1-p_1}{p_1}\right).$$

$F_{F(2(n-c_0),2(c_0+1))}(x)$ znamená hodnotu distribuční funkce Odvození takových vztahů lze nalézt v Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974, str. 141 a 132-133.

Možná rozšíření

Výše uvedené testy byly jednovýběrové. Tj. uskutečnil se náhodný výběr předepsaného rozsahu a na základě jeho vyhodnocení se rozhodne o přijetí či odmítnutí dodávky. Jednoduchým zobecněním lze sestavit přejímací procedury, které nemusí na základě prvního výběru rozhodnout. Pokud nelze prvním výběrem rozhodnout, realizuje se druhý výběr (dvoustupňová přejímací procedura) a ten už musí rozhodnout. Bylo by možné (srovnejte sekvenční testy) sestavit proceduru, kde bude možné výběry opakovat až do rozhodnutí. Obvykle se končí u dvoustupňového postupu (ekonomie testování).

Námět: Srovnejte proceduru pro přejímku měřením a proceduru pro přejímku srovnáním, za předpokladu, že měřené parametry se srovnávají s tolerančními mezemi. Nevyhoví-li srovnávaný kus tolerancím, označí se za vadný a vstupem přejímky srovnáním je počet takto definovaných vadných.

Statistické „sledování“ jakosti, procesní.

SPC (Shewhartovy – Statistical Process Control Charts) diagramy

Mějme náhodný Gaussovský proces se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, proces je stacionární a je modelem pro sledovanou výrobní veličinu. Jednotlivé odečty v různých časových okamžicích jsou nezávislé ≡ výrobní veličina má svou přirozenou náhodnost. Dále budeme předpokládat, že je možné v jednom časovém okamžiku uskutečnit n nezávislých odečtů.

Pro sledování jakosti se při měřených hodnotách předpokládá normalita, časová nezávislost a stacionarita náhodné („reziduální“) složky měřené veličiny. Při technických údajích je to přijatelný předpoklad.

Označíme:

$\overline{x_t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,t}$, kde $x_{i,t}$ je i-tý odečet sledované výrobní veličiny v čase *t* (např. *n* měření průměru soustružnického obrobku).

$\overline{x_t}$ je průměr z uskutečněných *n* odečtů v čase *t*.

$R_t = \max\limits_{i=1,\dots n} x_{i,t} - \min\limits_{i=1,\dots n} x_{i,t} = x_{(n)t} - x_{(1)t}$ je variační rozpětí odečtů v čase *t*.

$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{x_t}$, je konzistentní odhad neznámé střední hodnoty μ za dobu *m*.[1]

$\overline{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{R_t}$, je průměrné variační rozpětí za dobu *m*.[1]

m je celková doba pro kterou se příslušný diagram sestrojuje (směna, týden, ..), někdy se používá, z praktických důvodů, okno, tj. posledních ***m*** pozorování. To proto aby byla k dispozici aktuální signalizace o „stavu“ procesu, nikoliv až po uplynutí příslušného času.

Statistika $\overline{x_t}$ je pak „odhadem“ střední hodnoty (parametru polohy) pro daný čas.

Statistika R_t je pak „odhadem-měřítkem“ variability (parametru měřítka) pro daný čas.

Obě statistiky slouží k testu hypotézy – proces je řízen (under control) ≡ splňuje v záhlaví vypsané předpoklady proti alternativě „alespoň jeden z předpokladů neplatí.

Za daných předpokladů platí, pro test o střední hodnotě, při hladině spolehlivosti $\alpha = \alpha/2 + \alpha/2$ kritický obor: $W_\alpha = \left\{ t = \sqrt{n}\,\frac{\left(\overline{x} - \mu_0\right)}{s}; \left| t \right| \geq t_{1-\alpha}(n-1) \right\}$. Tedy odmítáme hypotézu o shodě střední hodnoty, pokud $\left| \sqrt{n}\frac{\left(\overline{x} - \mu_0\right)}{s} \right| \geq t_{1-\alpha}(n-1) \Leftrightarrow \mu_0 - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq \mu_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$.

Pokud nahradíme μ_0 jejím konzistentním odhadem $\overline{\overline{x}}$, dostaneme:

$$\overline{\overline{x}} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq \overline{\overline{x}} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Označíme-li:

$DMZ_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ dolní mez zásahu (LCL – Lower Control Limit) a

$HMZ_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ horní mez zásahu (UCL – Upper Control Limit)

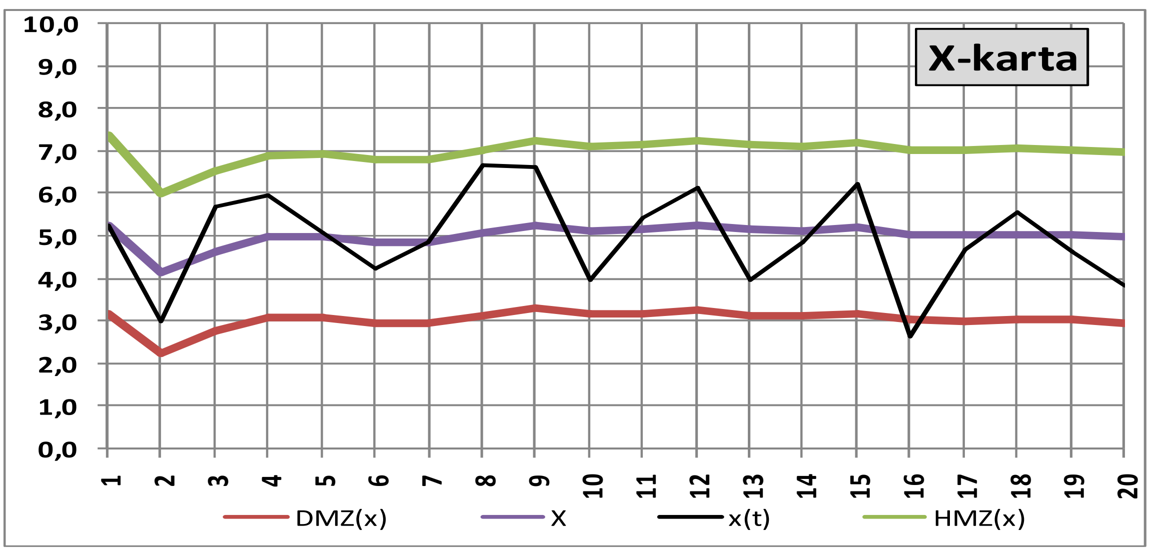
[1] Toto platí, za předpokladu, že všechny dílčí průměry jsou počítány ze stejného počtu odečtů.

Budeme přijímat výše formulovanou hypotézu: $DMZ_{\bar{x}} \le \bar{x} \le HMZ_{\bar{x}}$, pokud se $\bar{x}_t$ vyskytne mimo tento interval, přijímáme alternativu.

Historicky tyto metody vznikly před tím, než byly k dispozici efektivní výpočetní prostředky, to prakticky znemožňovalo výpočet s. Proto se k výpočtu používal odhad $\bar{R}$ - průměrné variační rozpětí. Tento odhad se i nadále používá, přestože minul původní důvod jeho užití. Novodobým zdůvodněním je jeho „robustnost". Proto:

$DMZ_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$, $HMZ_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$, kde $A_2\bar{R} = t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow A_2 = \frac{t_{1-\alpha}(n-1)}{\sqrt{n}}\frac{s}{\bar{R}}$. Striktně: A_2 není konstantou, ale poměr $\frac{s}{\bar{R}}$ je, za předpokladu normality, velice málo volatilní (viz.: Sdružené rozdělení výběrového maxima a minima, přednáška SA1-04, pro gaussovské rozdělení a přednášku VSM 9). „Konstanty" $A_2 = A_2(n)$ bývají obvykle tabelovány (viz např. Douglas C. Montgomery: Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. John Wiley & Sons, August 2004). Hladina spolehlivosti α bývá, opět z historických důvodů, „ukotvena" na hodnotě 1-0,9973. Číslo 0,9973 je pravděpodobnost toho, že se pozorování normální náhodné proměnné bude vyskytovat v pásu $\pm 3\sigma$ kolem střední hodnoty.

Obvykle se takový test užívá v grafické formě, viz následující obrázek:



Počáteční volatilita DMZ a HMZ je dána malým disponibilním počtem pozorování. Zde v čase t=16 bude vyloučena hypotéza o tom, že je proces ovládán (řízen). Tedy, jedná se o signalizaci toho, že se v (produkčním) procesu děje něco výjimečného (a to z pohledu polohy = hodnoty sledované veličiny).

V oblasti řízení jakosti se užívá následující terminologie pro možné chyby:

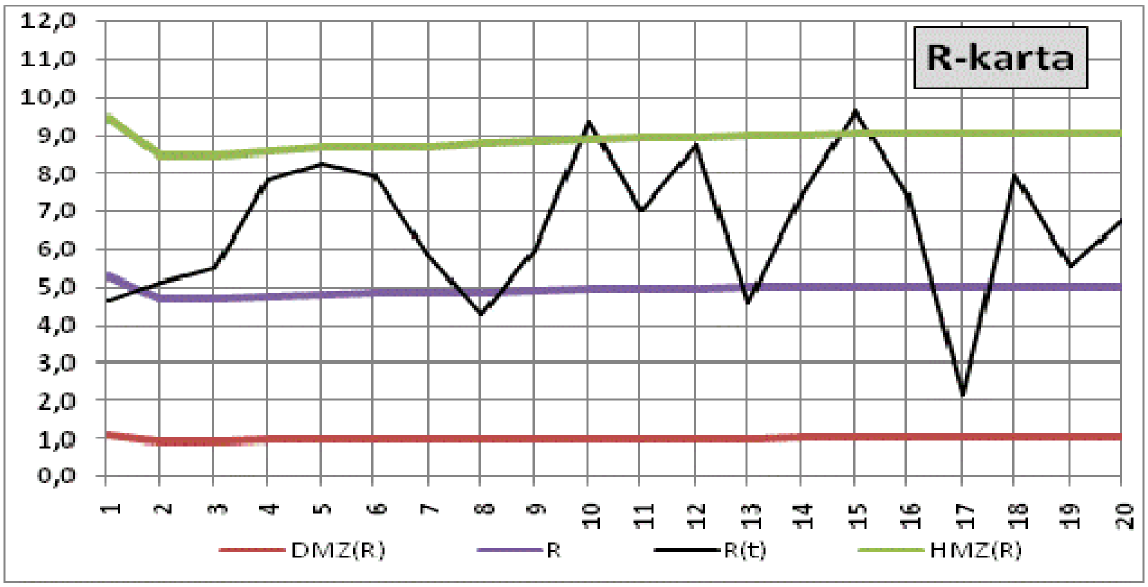
1. Chyba planého poplachu = proces – hodnota $\bar{x}_t$ je mimo interval DMZ, HMZ, přesto se jedná o běžnou situaci. Pravděpodobnost této chyby je rovna zvolené hladině spolehlivosti α.
2. Chyba mazáním = proces – hodnota $\bar{x}_t$ je uvnitř intervalu DMZ, HMZ, přesto se jedná o výjimečnou situaci. Pro pravděpodobnost této chyby lze v některých případech získat

přijatelné odhady, obecně nelze stanovit její efektivní hodnotu. Pravděpodobnost této chyby se někdy snižuje použitím „Vět o typových sekvencích" – viz např. přednáška ZTI-4.

Obdobnými úvahami (ale trochu komplikovanějšími, využívá se asymptotické normality rozdělení $\overline{R}$) lze sestrojit podobný test na přijatelnou variabilitu, měřenou R_t

$DMZ_R \le R_t \le HMZ_R$, kde $DMZ_R = D_3 * \overline{R}$ a $HMZ_R = D_4 * \overline{R}$. „Konstanty" D_3 a D_4 bývají opět tabelovány (lze využít výše uvedený odkaz, nebo tabulku v příloze tohoto textu)

Opět, takový test se užívá v grafické formě, viz následující obrázek:



Zase: počáteční volatilita DMZ a HMZ je dána malým disponibilním počtem pozorování. Zde v časech t=10, 15 bude vyloučena hypotéza o tom, že je proces ovládán (řízen). Tedy, jedná se o signalizaci toho, že se v (produkčním) procesu děje něco výjimečného (a to z pohledu měřítka = volatility sledované veličiny).

Možná rozšíření

Takovému testování se běžně říká X-R karty. Pokud by se místo (historického) aparátu variačního rozpětí užilo odhadů směrodatných odchylek, používá se název X-S karty. Obé lze použít jak pro přímo měřitelné veličiny, tak i pro odvozené veličiny (např. četnosti výskytu nekvantifikovatelných vad – kategoriálních, jevových). Pokud je oprávněný předpoklad o jiném než normálním rozdělení procesních veličin, užije se takový předpoklad k modifikacím a upřesněním. Pokud nelze použít předpoklad nekorelovanosti náhodné složky, užívá se aparát AR a ARMA procesů, případně jejich dalších modifikací. Pro taková rozšíření a důkladnější výklad viz:

1. Douglas C. Montgomery: Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. John Wiley & Sons, August 2004. Celá.
2. Jiří Reif: Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004, str. 178-204.
3. …. .

Doporučená a zdrojová literatura:

Jiří Reif	Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004
Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
Mendenhall. W.	Introduction to Probability and Statistics. PWS-KENT, Publishing Company, Boston 1987.
Groebner, D.F., Shannon P. W.	Business Statistics. A Decision-Making Approach. Merrill Publishing Company, Columbus Ohio, 1989.
Douglas C. Montgomery	Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. John Wiley & Sons, August 2004.
	http://www.qualityamerica.com/

n=	A2	D3	D4
2	1,8800	0	3,2670
3	1,0230	0	2,5750
4	0,7290	0	2,2820
5	0,5770	0	2,1150
6	0,4830	0	2,0040
7	0,4190	0,0760	1,9240
8	0,3730	0,1360	1,8640
9	0,3370	0,1840	1,8160
10	0,3080	0,2230	1,7770
11	0,2850	0,2560	1,7440
12	0,2660	0,2830	1,7170
13	0,2490	0,3070	1,6930
14	0,2350	0,3280	1,6720
15	0,2230	0,3470	1,6530

n=	A2	D3	D4
16	0,2120	0,3630	1,6370
17	0,2030	0,3780	1,6220
18	0,1940	0,3910	1,6080
19	0,1870	0,4030	1,5970
20	0,1800	0,4150	1,5850
21	0,1730	0,4250	1,5750

Pro vyšší n lze použít následující asymptotické vzorce: $A_2 = 0{,}76/\sqrt{n}$, $D_3 + D_4 = 2$, často $D_3 = 0{,}46$; $D_4 = 1{,}54$.