„Některé deterministické konvergence“

Definice: Číselná posloupnost x_n konverguje k číslu x, značeno $x_n \to x$, pokud platí: $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0; \forall n > n_0$ je $|x_n - x| < \varepsilon$.

Definice A: Číselná posloupnost x_n konverguje k posloupnosti y_n, značeno $x_n \to y_n$,pokud $x_n - y_n \to 0$. Tedy $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0; \forall n > n_0$ je $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

Definice B: Číselná posloupnost x_n konverguje k posloupnosti $y_n \neq 0$, značeno $x_n \overset{a}{\to} y_n$, pokud $\frac{x_n}{y_n} \to 1$. Tedy $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0; \forall n > n_0$ je $\left|\frac{x_n}{y_n} - 1\right| < \varepsilon$.

Triviální vlastnosti:

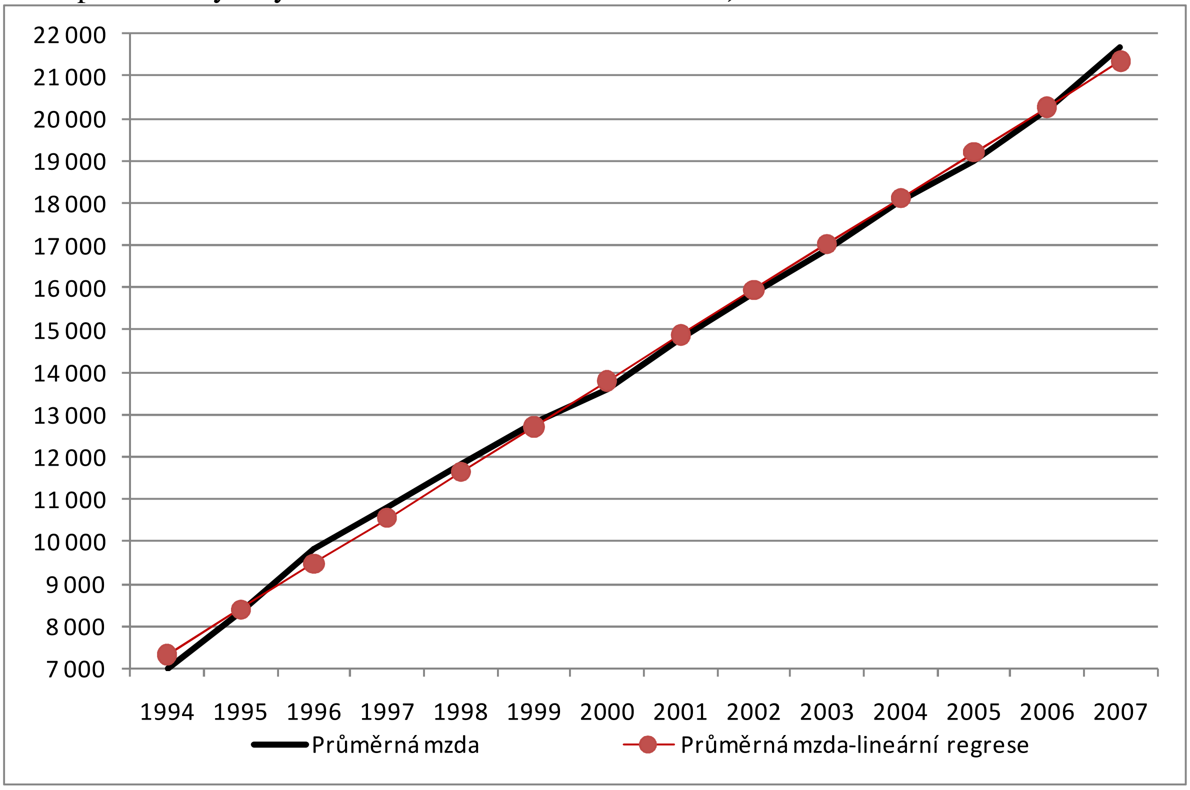
1. $x_n \to y_n \Rightarrow y_n \to x_n$. **Důkaz** je evidentní.
2. Nemusí platit $((x_n \to y_n) \wedge (y_n > 0)) \Rightarrow \left(x_n \overset{a}{\to} y_n\right)$. **Důkaz:** zvolíme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n^2}$, evidentně $x_n \to y_n$, neboť pro $n > 0$ je $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{n}$ a aby platilo $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ stačí $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$. A proto stačí zvolit $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$(horní celá část). Ale $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1/n}{1/n^2} = n$, tedy $x_n \overset{a}{\not\to} y_n$.
3. Nemusí platit $\left(x_n \overset{a}{\to} y_n\right) \Rightarrow \left(x_n \to y_n\right)$. **Důkaz:** zvolíme $x_n = n^2 + 3n + 1$ a $y_n = n^2 + n + 1$, pak $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$. Ale $x_n - y_n = 2n$ a odtud je zřejmé $x_n \not\to y_n$.

Příklad aplikace:

Vývoj průměrných (přes zaměstnance a přes měsíce) měsíčních mezd v letech 1994-2007 lze poměrně spolehlivě „aproximovat" lineární regresní čárou

Průměrná mzda=1 079*letopočet-2 145 081

a to s poměrně vysokým koeficientem determinace $R^2=0{,}998$.



Zdroj dat: https://www.czso.cz/csu/czso/ceska-republika-od-roku-1989-v-cislech-2017-24bfnixod8#05

Zajímavá a důležitá úloha je popis růstu (změn) takových mezd. To povede na studium dvou posloupností: $y_n = 1079n - 2145081$ a $x_n = y_{n+1} = 1079(n+1) - 2145081 = 1079n - 2144022$, $n \geq 1994$.

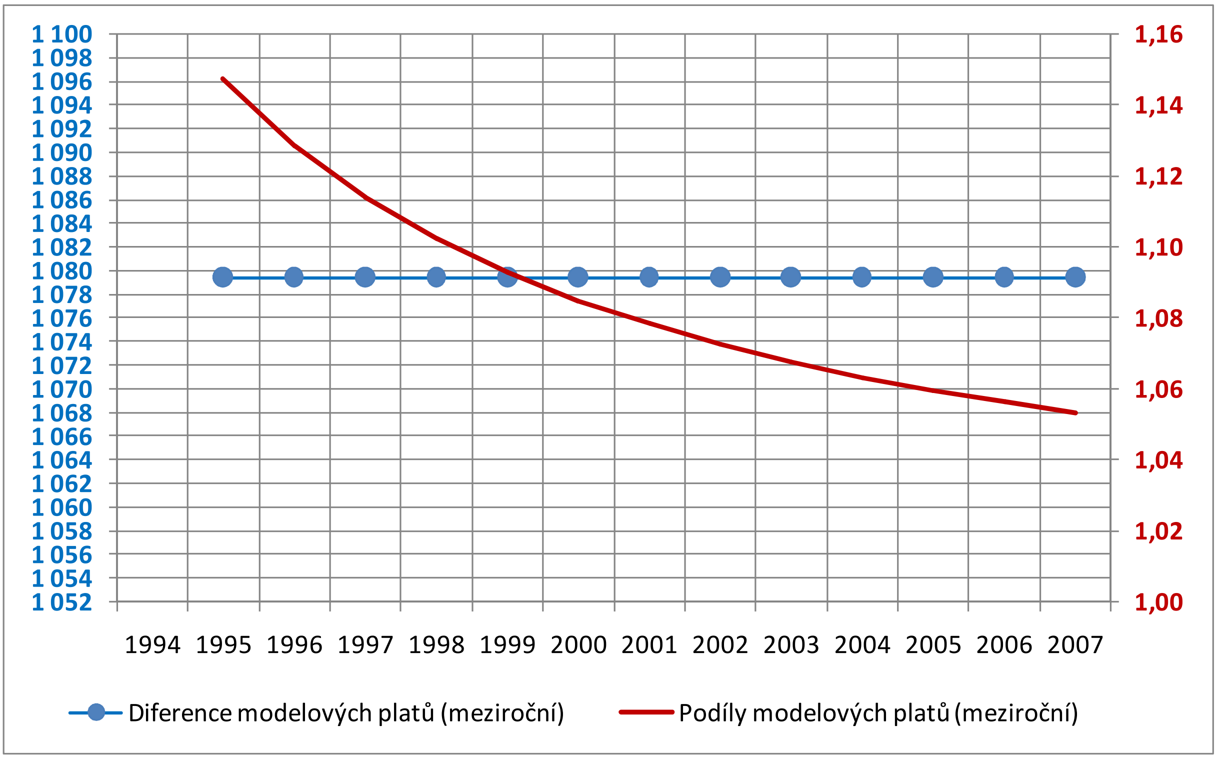
Zkoumáme-li absolutní růst mezd je pak zajímavý rozdíl: $x_n - y_n = 1079 \Rightarrow x_n \not\to y_n$.

Zkoumáme-li relativní (procentní) růst mezd je pak zajímavý podíl: $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1079n - 2144022}{1079n - 2145081}$.

Potom: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1079n - 2144022}{1079n - 2145081} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1079 - \dfrac{2144022}{n}}{1079 - \dfrac{2145081}{n}} = 1$ a tedy $x_n \overset{a}{\to} y_n$.

Shrnuto: průměrná mzda, při lineárním modelu, následujícího období relativně (poměrově) konverguje ke mzdě současného období. Průměrná mzda, při lineárním modelu, následujícího období absolutně (rozdílově) **ne-**konverguje ke mzdě současného období.

To je demonstrováno následujícím grafem:



Námět: Studujte uvedené jevy, pokud pro daná data použijete „procentní regresi" tj. $y_t = Y_0(1+r)^{t-t_0}$.

Interpretačně: „Blížení" se jedné časové řady (např. modelové) k řadě jiné může mít mnoho vyjádření, záleží na tom jak takové „přibližování měříme". Volba „způsobu měření přibližování = přijatelnosti modelu" záleží na tom, jak dál budeme s takovými řadami pracovat (k čemu bude použit model).

Konvergence s pravděpodobností

Aby bylo možno zavést pojem konvergence v případě výskytu nahodilostí a aby takový pojem měl analogické vlastnosti jako u deterministických konvergencí, je zapotřebí takový pojem přenést na některý (deterministický) popis náhodné proměnné nebo na jeho neprázdnou část. Proto:

Konvergence v distribuci

Nechť X_n je posloupnost náhodných proměnných a X je náhodná proměnná s distribučními funkcemi $F_{X_n}(x) = F_n(x) = P\{X_n < x\}$, $F_X(x) = F(x) = P\{X < x\}$. Pokud platí $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x) \forall x$ ve kterých je $F(x)$ spojitá, řekneme, že náhodné proměnné X_n konvergují k X v distribuci. To bude značeno $X_n \xrightarrow{d} X$.

Poznámka: Důležitý je fakt, že X je náhodná proměnná, tedy, že $F(x)$ **je distribuční funkce.**

Příklad 1: Nechť X_n je náhodná proměnná rovnoměrně rozložená na intervalu $\langle n, n+1\rangle; n \geq 0; n$ je celé, Potom $F_n(x) = \begin{matrix} 0 \Leftrightarrow x < n \\ x - n \Leftrightarrow n \leq x \leq n+1 \\ 1 \Leftrightarrow x > n+1 \end{matrix}$

Je zřejmé, že $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0; \forall x \in R_1$. Tedy posloupnost $F_n(x)$ konverguje ke spojité funkci $F(x) = 0; x \in R_1$, která ale **není distribuční funkcí**!

Příklad 2: Nechť $X_n = 1 - \frac{1}{n}$ je konstantní náhodná proměnná, potom: $F_n(x) = \begin{matrix} 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 1 \Leftrightarrow x > 1 - \frac{1}{n} \end{matrix}$.

A $F(x) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{matrix} 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{matrix}$. Protože (v tomto případě) $\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 = X$.

Tato náhodná (opět konstantní) proměnná má distribuční funkci $F_1(x) = \begin{matrix} 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \\ 1 \Leftrightarrow x > 1 \end{matrix}$ a obě funkce se shodují na celém definičním oboru, **kromě bodu nespojitosti** $x = 1$, tedy jedná se o konvergenci podle distribuce.

Konvergence v pravděpodobnosti (slabá konvergence)

Nechť X_n je posloupnost náhodných proměnných a X je náhodná proměnná, řekneme, že náhodné proměnné X_n konvergují k X v pravděpodobnosti, pokud: $\forall \varepsilon > 0; \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$. To bude značeno $X_n \xrightarrow{P} X$.

Konvergence v pravděpodobnosti implikuje konvergenci v distribuci. Důkaz lze nalézt v: Alfréd Rényi: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str. 318.

Naopak to nemusí platit. Tedy z konvergence v distribuci neplyne konvergence v pravděpodobnosti. Ale pokud $X_n \xrightarrow{d} c$, kde c je nějaká konstanta, pak se konvergence v distribuci a v pravděpodobnosti shodují.

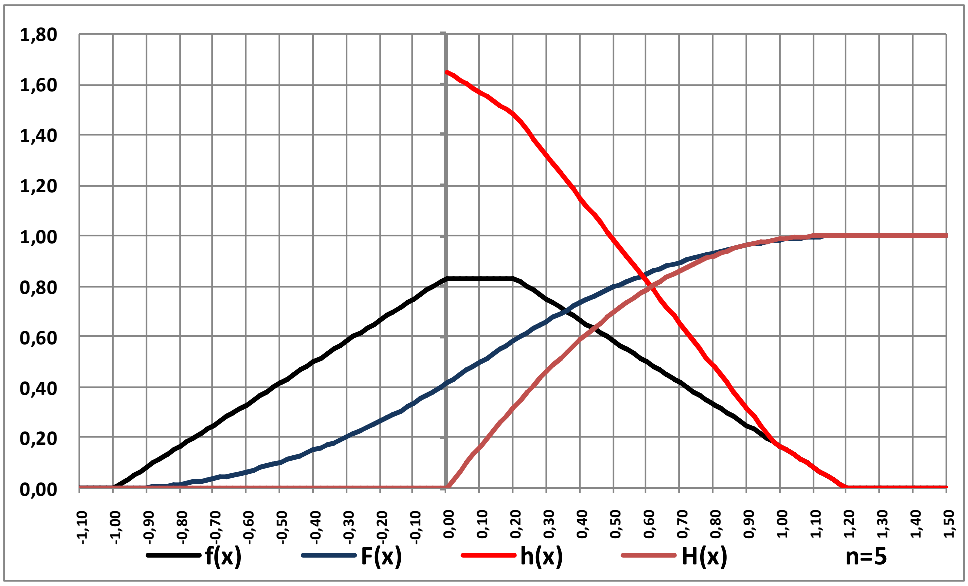
Příklad 3: Mějme posloupnost X_n nezávislých náhodných proměnných s distribučními funkcemi $F_{X_n}(x) = F_n(x) = P\{X_n < x\} = \begin{matrix} 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \\ \frac{n}{n+1} x \Leftrightarrow 0 < x < 1 + \frac{1}{n} \\ 1 \Leftrightarrow x \geq 1 + \frac{1}{n} \end{matrix}$, jedná se tedy o posloupnost rovnoměrně rozdělených náhodných proměnných na intervalu $\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Evidentně platí

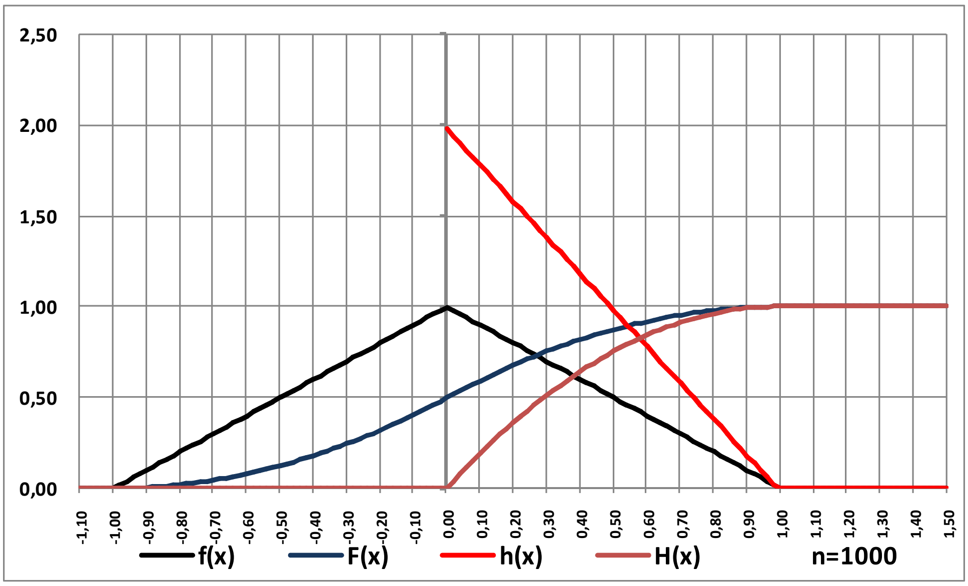
$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow x \le 0 \\ x \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ 1 \Leftrightarrow x \ge 1 \end{cases}$. Tedy $X_n \xrightarrow{d} X$. Ale náhodná proměnná

$X_n - X$ má „lichoběžníkové“ rozdělení s hustotou $f_{X_n - X}(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow (x \le -1) \vee \left(x \ge \frac{n+1}{n} \right) \\ \frac{n+1}{n}(x+1) \Leftrightarrow -1 < x \le 0 \\ \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{n}{n+1} x \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x \le \frac{n+1}{n} \end{cases}$.

Náhodná proměnná $|X_n - X|$ má dále rozdělení s hustotou $h_{|X_n - X|}(x) = \begin{cases} f_{X_n-X}(x) + f_{X_n-X}(-x) \Leftrightarrow x \ge 0 \\ 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$

Takové hustoty a jim odpovídající distribuční funkce jsou na následujících obrázcích:





Potom $P(|X_n - X| < \varepsilon) = H_n(\varepsilon) \underset{n}{\to} 2\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \neq 1$ pro $0 \le \varepsilon < 1$. Posloupnost X_n konverguje v distribuci, ale nekonverguje v pravděpodobnosti.

Námět: Podrobně odvoďte uvedené vztahy a vztahy pro uvedené průběhy. Návod: Jedná se o hustoty a distribuční funkce rozdílu a absolutní hodnoty rozdílu dvou nezávislých rovnoměrných náhodných proměnných (Alfréd Rényi: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str. 180-182).

Konvergence skoro jistě

Nechť X_n je posloupnost náhodných proměnných a X je náhodná proměnná, řekneme, že náhodné proměnné X_n konvergují k X skoro jistě, pokud: $P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1$.

To bude značeno $X_n \xrightarrow{sj} X$.

Poznámka: Zde je vhodné podrobněji vysvětlit, co znamená výraz $P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1$. Musíme proto rozebrat jev $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$. Jeho vyjádření lze převést na vyjádření $\lim_{n\to+\infty}(X_n - X) = 0$. Toto vyjádření znamená $\forall\varepsilon > 0; \exists n_0; \forall n > n_0$ je $|X_n - X| < \varepsilon$. Doplněno do původního zápisu $P(\forall\varepsilon > 0; \exists n_0; \forall n > n_0 \text{ je } |X_n - X| < \varepsilon) = 1$. Ten lze přepsat na $P\left(\forall\varepsilon > 0; \exists n_0; \sup_{n>n_0} |X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$. Volněji: Pravděpodobnost toho, že ke každému danému nezápornému ε nenalezneme takové n_0 je tedy nulová (míry nula).

Konvergence v k-tém momentu (středu)

Nechť X_n je posloupnost náhodných proměnných a X je náhodná proměnná, řekneme, že náhodné proměnné X_n konvergují k X v k-tém momentu (středu), pokud:

$\lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|^k\right) = 0; k \geq 1$. To bude značeno $X_n \xrightarrow{k-m} X$. Specielně pro ***k=2*** se taková konvergence nazývá konvergence podle kvadratického středu.

Platí následující vztahy:

a) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

b) $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$; c je konstanta

c) $X_n \xrightarrow{2-m} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

d) $X_n \xrightarrow{sj} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

e) $\left(X_n \xrightarrow{2-m} c\right) \wedge \left(\sum E(X_n - c) < +\infty\right)$; c je konstanta $\Rightarrow X_n \xrightarrow{sj} c$

f) …

Důkazy lze nalézt: Alfréd Rényi: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str. 318, C. Radhakrishna Rao: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978, str. 139-140. A i jinde.
Opačné implikace nemusí platit. Něco již bylo uvedeno výše.

Příklad 4: Mějme posloupnost $X_n; n = 1,2,...$ nezávislých náhodných proměnných s následujícím modelem: $X_n \in \{0, n\}; P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}; P(X_n = n) = \frac{1}{n}$.

Potom:

$$E\{X_n\} = 0 * \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n * \frac{1}{n} = 1,$$

$$E\{X_n^2\} = 0^2 * \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^2 * \frac{1}{n} = n \text{ a}$$

$$\sigma^2(X_n) = E\{X_n^2\} - \left(E\{X_n\}\right)^2 = n - 1.$$

$$\forall\, n > \varepsilon > 0; P(|X_n - 0| < \varepsilon) = P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$\forall\ 1 > \varepsilon > 0; \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| < \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, takové zúžení je možné, neboť, pokud by bylo zvoleno $\varepsilon' \geq 1$, lze k němu nalézt $\varepsilon < \varepsilon'; \varepsilon < 1$.

Ale: $E\left\{|X_n - 0|^2\right\} = E\left\{X_n^2\right\} = n$.

Posloupnost $X_n \xrightarrow{P} 0$ ale nekonverguje v kvadratickém středu, protože $\lim_{n\to+\infty} E\left\{|X_n - 0|^2\right\} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Další text a příklady lze nalézt na:
https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee126/fa18/modes-of-convergence-short.pdf

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-436j-fundamentals-of-probability-fall-2018/lecture-notes/MIT6_436JF18_lec16.pdf

Doporučená a zdrojová literatura:

C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
Alfréd Rényi	Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972
	http://www-unix.ecs.umass.edu/~dgoeckel/Chapter9.pdf