Intervalové odhady. Metody konstrukce intervalových odhadů

Základní metoda konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Určíme nějakou statistiku $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ odhadující parametr g.
2. Na množině $T(\mathrm{X}^n) \times G$, *kde* $T(\mathrm{X}^n)$ *je množina možných hodnot zvolené statistiky nad daným výběrovým prostorem a* G *je množina možných hodnot parametru* g, zvolíme funkci $h(T, g)$. Funkce je zvolena tak, že rozdělení jejích hodnot $h(T, g)$ nezávisí na (neznámém) hledaném parametru g. Na volbu takové funkce je pak dáno i následující omezení: $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ existuje její inverze vůči g.
3. K dané funkci $h(T, g)$ existují čísla h_d, h_h taková, že $P(h_d < h(T, g) < h_h) = 1 - \alpha$. Podotýkáme, že čísla h_d, h_h nejsou dána jednoznačně.
4. Z existence inverze vůči g pak plyne $P\left(h^{-1}(T, h_d) < g < h^{-1}(T, h_h)\right) = 1 - \alpha$ (to za předpokladu, že funkce $h(T, g)$ je při daném T rostoucí; **námět**: zformulujte totéž pro případ, že je klesající).
5. V takovém případě $g_d(x_1, x_2, ..., x_n) = h^{-1}(T(x_1, x_2, ..., x_n), h_d)$ a $g_h(x_1, x_2, ..., x_n) = h^{-1}(T(x_1, x_2, ..., x_n), h_h)$, jsou hledané konfidenční meze.

Tato metodika je uvedena podle Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 114-115.

Námět: Ověřte, za jakých podmínek nepůjde splnit požadovaný předpoklad: $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ existuje inverze $h(T, g)$ vůči g. {Jedna z možností: uvažujte výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ z alternativního rozdělení}

Některé další konstrukce jsou založeny na následujícím tvrzení:

Mějme náhodný výběr z rozdělení $f(x; g); g \in \langle g_{min}, g_{max} \rangle$ o rozsahu *n*. Dále mějme statistiku $T(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pro ni zavedeme $F(t, g) = P(T \le t; g); G(t, g) = P(T \ge t; g)$. Pro funkci $F(t, g)$ předpokládejme splnění následujících podmínek:

1. $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ ***je*** $F(t, g)$ ***spojitá klesající funkce*** g.
2. $\lim_{g \to g_{min}} F(t, g) = 1$ ***a*** $\lim_{g \to g_{max}} F(t, g) = 0$.

Pro daná čísla $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ označme funkce $g_d(t), g_h(t)$ definované vztahy $F(t, g_h(t)) = \alpha_1$ a $G(t, g_d(t)) = \alpha_2$.

Pak platí $P(g \ge g_h(T); g) \le \alpha_1$ a $P(g \le g_d(T); g) \le \alpha_2$. Pokud je takové rozdělení statistiky $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ spojité, pak v obou nerovnostech platí rovnost. Z uvedených formulací je zřejmé, že $g_h(T)$ je $100(1 - \alpha_1)\%$ horní hranice spolehlivosti a obdobně $g_d(T)$ je $100(1 - \alpha_2)\%$ dolní hranice spolehlivosti pro „neznámý" parametr g. Dvojice $g_d(T)$, $g_h(T)$ je tedy $100(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\%$ intervalem spolehlivosti.

Tvrzení je převzato z: Machek J., Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 122-123, kde je i uveden důkaz, založený na následující skutečnosti:

Protože dle uvedeného předpokladu je $F(t,g)$ spojitou klesající funkcí v g je nerovnost $g \geq g_h(T)$ ekvivalentní nerovnosti $F(t,g) \leq F(t,g_h(T))$. Ale pro $F(t,g_h(t))$ platí $F(t,g_h(T)) = \alpha_1$, proto je nerovnost $g \geq g_h(T)$ ekvivalentní i nerovnosti $F(t,g) \leq \alpha_1$. Odtud $P(g \geq g_h(T); g) = P(F(t,g) \leq \alpha_1; g)$. Protože $F(t,g) = P(T \leq t; g)$ je i $P(g \geq g_h(T); g) = P(P(T \leq t; g) \leq \alpha_1; g) = \alpha_1$, neboť „pravděpodobnost pravděpodobnosti je pravděpodobnost“. Shrnuto: $P(g \geq g_h(T); g) = \alpha_1$ (toto platí pro situaci kdy je rozdělení statistiky T spojité). Pro případ, kdy rozdělení statistiky T není spojité, dostaneme:
$P(g \geq g_h(T); g) = P(F(t,g) \leq \alpha_1; g) = P(T \leq sup\{t : F(t,g) \leq \alpha_1\}; g) \leq \alpha_1$

Námět: dokončete důkaz i pro druhou nerovnost.

Námět: modifikujte uvedené tvrzení pro situaci, kdy bude platit $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ je $F(t,g)$ spojitá rostoucí funkce g, včetně důkazu (modifikujte pro tento případ i druhý předpoklad).

Námět: k čemu je třeba v původním tvrzení předpoklad $\lim\limits_{g \to g_{min}} F(t,g) = 1$ *a* $\lim\limits_{g \to g_{max}} F(t,g) = 0$, jak bude vypadat tento předpoklad pro modifikaci z předcházejícího námětu?

Příklad: Mějme náhodný výběr z alternativního rozdělení $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $P(x_i = 1) = p = P(A); P(x_i = 0) = 1 - p = P(\overline{A})$, kde A je sledovaný jev a pozorovaná alternativní náhodná proměnná je indikátorem jeho realizace. Potom statistika $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ = počet realizací pozorovaného jevu během n nezávislých experimentů, má binomické rozdělení: $P(T = t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$, kde hledáme pro p jeho interval spolehlivosti. Funkce $F(t,p)$ má pak tvar $F(t,p) = P(T \leq t; p) = \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ a funkce $G(t,p)$ má pak tvar $G(t,p) = P(T \geq t; p) = \sum_{k=t}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Dolní a horní mez pro zvolená čísla $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 < 1$ nalezneme řešením rovnic:

$$\sum_{i=0}^{T} \binom{n}{i} p_h^i (1 - p_h^i)^{n-i} = \alpha_1 \text{ a } \sum_{i=T}^{n} \binom{n}{i} p_d^i (1 - p_d^i)^{n-i} = \alpha_2$$

Tyto dva vztahy je možné, v současnosti, řešit velmi jednoduše numericky (námět: navrhněte konkrétní metodu). Ve starší a klasické statistické literatuře jsou jejich řešení nalézána pomocí některých transformací na kvantily Fischer-Snedecorova F-rozdělení např.:

Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974. Str. 236.
Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 124-126.

Příklad: Mějme náhodný výběr z Poissonova rozdělení $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $P(x_i = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Potom statistika $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ = počet realizací pozorovaných Poissonovských událostí v n nezávislých experimentech, má rozdělení $P(T = k) = e^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$. Hledáme interval spolehlivosti pro neznámý parametr λ.

Dolní a horní mez pro zvolená čísla $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ nalezneme řešením rovnic:

$$\sum_{i=0}^{T} e^{-n\lambda_h}\frac{(n\lambda_h)^i}{i!} = \alpha_1 \text{ a } \sum_{i=T}^{+\infty} e^{-n\lambda_d}\frac{(n\lambda_d)^i}{i!} = \alpha_2$$

Opět první z rovnic lze bez problémů pomocí současných prostředků řešit numericky, druhá zdánlivě ne. Ovšem jen zdánlivě, pokud si uvědomíme, že: $\sum_{i=T}^{+\infty} e^{-n\lambda_d}\dfrac{(n\lambda_d)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{T-1} e^{-n\lambda_d}\dfrac{(n\lambda_d)^i}{i!} = \alpha_2$.

Znova, ve starší a klasické statistické literatuře jsou jejich řešení nalézána pomocí některých transformací (zde pomocí tvrzení o vyjádření binomických a Poissonovských pravděpodobností) na kvantily χ^2 rozdělení např.:

Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974. Str. 241.
Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 126-128.

Statistické toleranční meze - intervaly, zavedení a náhled metod.

Definice

Mějme náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (iid) z náhodné proměnné ξ s distribuční funkcí $F_\xi(x)$ a dvě statistiky $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pod **tolerančním (statistickým) intervalem** (β, γ) budeme rozumět obě statistiky, pokud platí:

- $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $P_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\left(P_\xi\{L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \xi \le U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \ge \beta\right) \ge \gamma$

Volněji: pravděpodobnost toho, že interval $\langle L, U \rangle$ „pokryje“ více než $100\beta\,\%$ pravděpodobnosti výskytu náhodné proměnné ξ je alespoň $100\gamma\,\%$.

Poznámka: V uvedené definici se objevují dvě náhodnosti a tím i dva pravděpodobnostní popisy. První je pravděpodobnost toho, že zkoumaná náhodná proměnná bude ležet mezi odhadnutými mezemi. Ale tyto meze jsou spočteny na základě pozorovaných dat, tedy jsou náhodné! Tedy i výrok $P_\xi\{L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \xi \le U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \ge \beta$ je náhodným jevem, proto je důležitá i pravděpodobnost toho, že se takový jev uskuteční (vnější definiční pravděpodobnost).

Někdy se zavádí statistický interval za modifikovaných podmínek

- *Při znalosti rozdělení a jeho parametrů.*

- *Bez znalosti konkrétního pravděpodobnostního popisu.*
- *S některými předpoklady na typ rozdělení (nejčastěji **spojitá distribuční funkce**).*
- *Ve více-rozměrných případech se pak pracuje s pojmem „statistická toleranční oblast“.*
- …..

Statistický toleranční interval pomocí distribuční funkce

$$P_{x_1,x_2,\dots,x_n}\left(F_\xi\left(U(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)-F_\xi\left(L(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)\geq\beta\right)\geq\gamma$$

Je evidentní, že jak $F_\xi\left(U(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$, tak i $F_\xi\left(L(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$ jsou náhodné proměnné. Použitý náhodný výběr (pozorování) $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ je náhodný a tím i statistiky $U(x_1,x_2,\dots,x_n)$ a $L(x_1,x_2,\dots,x_n)$ jsou náhodné proměnné (obecně závislé). Tyto jsou následně transformovány distribuční funkcí $F_\xi(*)$, tedy opět náhodné proměnné.

Využívání intervalových parametrických odhadů pro odhady tolerančních mezí

Příklad – s obecnějšími postupy:

První krok:

Mějme (iid) náhodný výběr $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ rozsahu $\boldsymbol{n}$ náhodné proměnné ξ s distribuční funkcí $F(x)=1-e^{-\frac{x}{\tau}}$ a hustotou $f(x)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}}$. Pro odhad parametru τ, užijeme statistiku $t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. Je evidentní, že: $E\{t\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{x_i\}=\tau$, jedná se tedy o nestranný odhad. Dále $nt=\sum_{i=1}^{n}x_i$ má rozdělení Gama $G(n,\tau)$ s hustotou $f_{nt}(x)=\frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{\tau}}}{\tau^{\,n}(n-1)!}$ a distribuční funkcí

$$F_{nt}(x)=\int_0^x\frac{z^{n-1}e^{-\frac{z}{\tau}}}{\tau^{\,n}(n-1)!}dz=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\frac{x}{\tau}}y^{n-1}e^{-y}dy=\frac{\Gamma\left(n,\frac{x}{\tau}\right)}{\Gamma(n)},$$ kde $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-t}t^{k-1}dt$ pro $k>0$ a $\Gamma(k,z)=\int_0^z e^{-t}t^{k-1}dt$, $k>0, z>0$. Proto $E\{nt\}=n\tau;\ \sigma^2\{nt\}=n\tau^2$. Označíme $G(n,\tau;x)=\int_0^x\frac{z^{n-1}e^{-\frac{z}{\tau}}}{\tau^{\,n}(n-1)!}dz$.

Druhý krok:

Dalším úkolem je získat intervalový odhad parametru τ. K tomu zvolíme statistiku $g = \frac{nt}{n\tau} = \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Její rozdělení je nezávislé (funkčně) na τ.

$F_g(x) = P(g < x) = P\left(\frac{nt}{n\tau} < x\right) = P\left(\frac{nt}{n\tau} < x\right) = P(nt < n\tau x) = F_{nt}(n\tau x) = G(n,\tau;n\tau x) = G(n,1;nx)$.

Hodnoty takové distribuční funkci můžeme stanovit bez znalosti τ. Potom pro hodnoty statistiky g můžeme nalézt čísla d,h taková že $P(d \le g \le h) \ge 1-\alpha$. Pokud položíme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, 0 < \alpha, \alpha_1, \alpha_2 < 1$. Potom je možno volit čísla d,h tak, že $G(n,1,nd) = \alpha_1$ a $G(n,1,nh) = 1-\alpha_2$. Odtud $nd = G^{-1}(n,1,\alpha_1)$ a $nh = G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)$.

Odtud dostaneme:

$$P\left(\frac{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}{n} \le g \le \frac{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)}{n}\right) = P\left(\frac{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}{n} \le \frac{t}{\tau} \le \frac{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)}{n}\right) = (A)$$

Nerovnosti $\frac{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}{n} \le \frac{t}{\tau} \le \frac{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)}{n}$ vyřešíme vůči τ a proto

$(A) = P\left(\frac{nt}{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)} < \tau < \frac{nt}{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}\right) = 1-\alpha$. Tím jsme získali $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti parametru τ. Pro přehlednost položíme $\tau_d = \frac{nt}{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)}, \tau_h = \frac{nt}{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}$

Třetí krok:

Evidentně je $\tau_d < \tau_h$. Shrnuto: $P(\tau_d < \tau < \tau_h) = 1-\alpha$.

Tento vztah použijeme pro odhad tolerančních mezí.

$$x>0 \Rightarrow 1-\alpha = P(\tau_d < \tau < \tau_h) = P\left(\frac{x}{\tau_h} < \frac{x}{\tau} < \frac{x}{\tau_d}\right) = P\left(-\frac{x}{\tau_d} < -\frac{x}{\tau} < -\frac{x}{\tau_h}\right) =$$

$$= P\left(e^{-\frac{x}{\tau_d}} < e^{-\frac{x}{\tau}} < e^{-\frac{x}{\tau_h}}\right) = P\left(1-e^{-\frac{x}{\tau_h}} < 1-e^{-\frac{x}{\tau}} < 1-e^{-\frac{x}{\tau_d}}\right) = P\big(F_\xi(\tau_h;x) < F_\xi(\tau;x) < F_\xi(\tau_d;x)\big)$$

Poznámka: Pro zobecnění je podstatné, že distribuční funkce je (zde *stejnoměrně přes* $x > 0$) monotónní funkcí svého parametru τ (zde klesající).

Shrnuto: $1-\alpha = P\big(F_\xi(\tau_h;x) < F_\xi(\tau;x) < F_\xi(\tau_d;x)\big); \forall x > 0$.

Požadujeme (hledáme) dvě čísla $x_d < x_h$ *tak, že* $P(x_d < \xi < x_h) \ge \gamma; 0 < \gamma < 1$. *Tj.* $F_\xi(\tau;x_h) - F_\xi(\tau;x_d) \ge \gamma$, *toho můžeme dosáhnout volbou dvou čísel* $1-\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; $0 < 1-\gamma, \gamma_1, \gamma_2 < 1$ *tak, že* $F_\xi(\tau;x_h) = 1-\gamma_1$; $F_\xi(\tau;x_d) = \gamma_2$. *Ale* τ *neznáme, známe pouze jeho odhady* τ_d, τ_h.

Z výše uvedené rovnosti $1-\alpha = P\big(F_\xi(\tau_h;x) < F_\xi(\tau;x) < F_\xi(\tau_d;x)\big); \forall x > 0$ dostaneme:

$$1-\alpha = P\big(F_\xi(\tau_h;x_h) < F_\xi(\tau;x_h) < F_\xi(\tau_d;x_h)\big) =$$

$$= P\big(F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau;x_d) < F_\xi(\tau;x_h) - F_\xi(\tau;x_d) < F_\xi(\tau_d;x_h) - F_\xi(\tau;x_d)\big)$$

Ale z toho, že $(\tau_d < \tau)$ a z toho, že $F_\xi(\tau;x)$ je klesající funkcí τ plyne $F_\xi(\tau_d;x_d) > F_\xi(\tau;x_d)$ a dále $-F_\xi(\tau_d;x_d) < -F_\xi(\tau;x_d)$. Proto $F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau_d;x_d) \le F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau;x_d)$. Dosazením této nerovnosti do rovnosti (2) dostaneme:
$1-\alpha \le P\left(F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau_d;x_d) < F_\xi(\tau;x_h) - F_\xi(\tau;x_d)\right)$, ale $F_\xi(\tau;x_h) - F_\xi(\tau;x_d) = P(x_d < x < x_h)$, proto: $1-\alpha \le P\left(F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau_d;x_d) < P(x_d < x < x_h)\right)$.

Zvolíme $F_\xi(\tau_h;x_h) - F_\xi(\tau_d;x_d) = \beta$, toho můžeme dosáhnout volbou dvou čísel $\beta_1, \beta_2 : 1-\beta = \beta_1 + \beta_2$; $0 < 1-\beta, \beta_1, \beta_2 < 1$ tak, že $F_\xi(\tau_h;x_h) = 1-\beta_1, F_\xi(\tau_d;x_d) = \beta_2$. Tj. $x_h = F_\xi^{-1}(\tau_h;1-\beta_1)$ a $x_d = F_\xi^{-1}(\tau_d;\beta_2)$.

Shrnuto: $P(P(x_d < x < x_h) > \beta) \ge 1-\alpha$. Nyní stačí položit $\gamma = 1-\alpha$. A dostaneme $P_{x_1,x_2,\dots,x_n}\left[P_\xi\{L(x_1,x_2,\dots,x_n) \le \xi \le U(x_1,x_2,\dots,x_n)\} \ge \beta\right] \ge \gamma$, kde $L(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_d$ a $U(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_h$.

Pro konkrétní, daný, typ rozdělení bude:

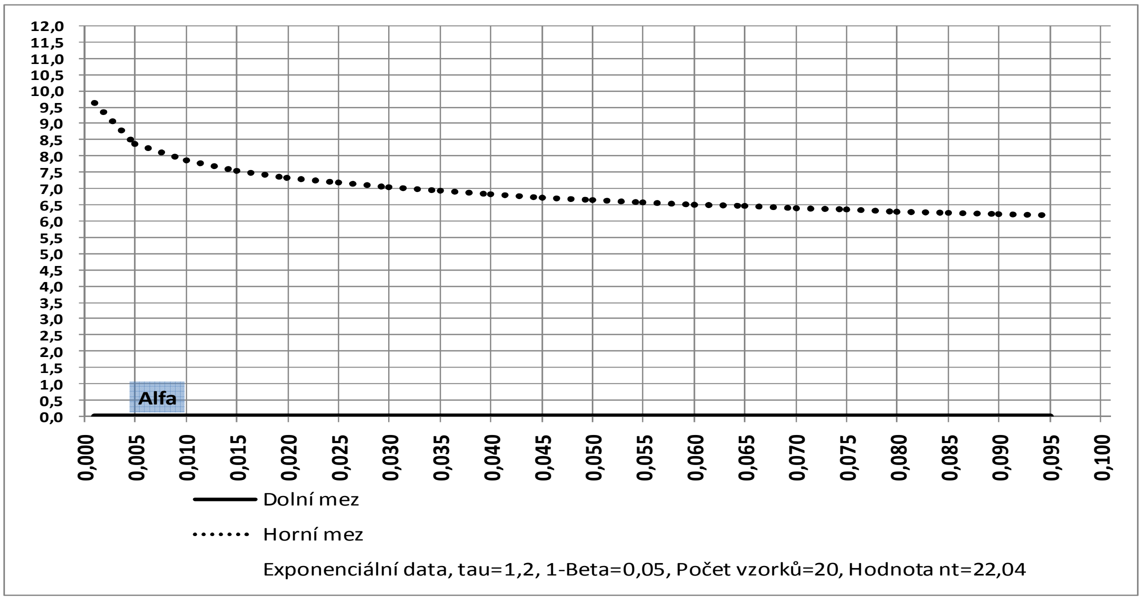
$$L(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_d = -\tau_d \lg(1-\beta_2) = -\frac{nt}{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)}\lg(1-\beta_2) = -\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\frac{\lg(1-\beta_2)}{G^{-1}(n,1,1-\alpha_2)} \text{ a}$$

$$U(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_h = -\tau_h \lg(\beta_1) = -\frac{nt}{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}\lg(\beta_1) = -\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\frac{\lg(\beta_1)}{G^{-1}(n,1,\alpha_1)}$$

Příklad testování metody $P_{x_1,x_2,\dots,x_n}\left[P_\xi\{L(x_1,x_2,\dots,x_n) \le \xi \le U(x_1,x_2,\dots,x_n)\} \ge 1-\beta\right] \ge 1-\alpha$

Exponenciální simulovaná data.

τ=	1,2		
1-β=	5,0%		
α=	Dolní mez	Horní mez	Pravdě-podobnost, β skutečná
0,001	0,015	9,617	0,988
0,005	0,016	8,373	0,986
0,010	0,017	7,852	0,985
0,015	0,017	7,549	0,984
0,020	0,018	7,335	0,983
…	…	…	…
0,060	0,019	6,518	0,980
0,065	0,019	6,458	0,980
0,070	0,019	6,403	0,979
0,075	0,019	6,351	0,979
0,080	0,020	6,302	0,979
0,085	0,020	6,256	0,978
0,090	0,020	6,213	0,978
0,095	0,020	6,172	0,978



Obecný postup

Mějme (iid) náhodný výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rozsahu ***n*** náhodné proměnné ξ s distribuční funkcí $F(x; g)$ s parametrem g. Dále mějme některý jeho intervalový odhad $P(g_d < g < g_h) > 1 - \alpha$. Nechť $F(x; g)$ je rostoucí a spojitou funkcí svého parametru g na celém definičním oboru náhodné proměnné ξ. Pak pro $0 < \beta, \beta_1, \beta_2 < 1; \beta = \beta_1 + \beta_2$. Potom čísla x_d, x_h, která jsou řešením rovnic $F(x_h; g_h) = 1 - \beta_2$; $F(x_d; g_d) = \beta_1$, tvoří toleranční meze pro náhodnou proměnnou ξ, pro které platí: $P(P(x_d < x < x_h) > 1 - \beta) > 1 - \alpha$.

Námět: Dokažte pro variantu, kdy $F(x; g)$ je klesající a spojitou funkcí svého parametru g na celém definičním oboru náhodné proměnné.
Námět: Pokuste se o zobecnění pro dvou-parametrické rozdělení $N(\mu, \sigma)$.
Námět: Pokuste se formulovat řešení úlohy s jednostrannou toleranční mezí.
Námět: Pokuste se formulovat a řešit úlohu o tolerančních mezích pro Poissonovo rozdělení s parametrem λ.
Námět: Pokuste se formulovat úlohu o tolerančních mezích pro binomické rozdělení *Bi(n,p)*, *n* je dané.
Námět: Pokuste se nalézt intervalový odhad pro oba parametry rozdělení *Bi(n,p)*.

Podrobně je tato problematika v Miloš Jílek: Statistické toleranční meze. SNTL Praha 1988.

Doporučená a zdrojová literatura:

Jiří Reif	Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004
Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
Alfréd Rényi	Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace,

	ACADEMIA, Praha 1978
Machek J.	Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK
Miloš Jílek	Statistické toleranční meze. SNTL Praha 1988.