Statistická kontrola jakosti a statistická přejímka

Tato oblast obsahuje různé statistické techniky, které je možno rozdělit:

- Přejímky měřením.
- Přejímky výběrem (srovnáváním).
- Statistické „sledování“ jakosti, procesní.
- …
- …

Pomocná partie – výběrová směrodatná odchylka a výběrové variační rozpětí – opakování a doplnění

Výběrová směrodatná odchylka

Statistika $s^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, kde $\bar{x}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Pro tyto statistiky platí:

$E\{s^2(n)\} = \sigma^2$, pokud σ^2 existuje, kde $\sigma^2 = E\{(x_i - \mu)^2\}; \forall i = 1,\dots,n$.

$E\{\bar{x}(n)\} = \mu$, pokud μ existuje, kde $\mu = E\{x_i\}; \forall i = 1,\dots,n$.

$\sigma^2\{\bar{x}(n)\} = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma^2\{s^2(n)\} = \frac{m_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4$, kde $\sigma^4 = \left(E\{(x_i - \mu)^2\}\right)^2; \forall i = 1,\dots,n$ a $m^4 = E\{(x_i - \mu)^4\}; \forall i = 1,\dots,n$.

Pro důkazy a odvození viz přednášky SA1 nebo Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974, str. 151-157.

Dále budeme předpokládat, že existují: $\mu = E\{x\}$, $m^i = E\{(x - \mu)^i\}; \forall i = 1,\dots,4$

Pomocné tvrzení 1: $E\{(x_i - \bar{x})\} = 0$. **Důkaz** je zřejmý.

Pomocné tvrzení 2: $E\{(x_i - \bar{x})^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. **Důkaz:** $E\{(x_i - \bar{x})^2\} = E\{(x_i - \mu + \mu - \bar{x})^2\} =$

$$= E\{(x_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{x})^2 + 2(x_i - \mu)(\mu - \bar{x})\} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2E\{(x_i - \mu)(\bar{x} - \mu)\} = (A)$$

ale $E\{(x_i - \mu)(\bar{x} - \mu)\} = E\{x_i\bar{x} - \mu\bar{x} - \mu x_i + \mu^2\} = E\{x_i\bar{x}\} - \mu^2 - \mu^2 + \mu^2 = E\{x_i\bar{x}\} - \mu^2 = (B)$,

ale $E\{x_i\bar{x}\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\{x_i x_j\} = \frac{1}{n}\left(E\{x_i^2\} + (n-1)\mu^2\right) = \frac{1}{n}\left(\mu^2 + \sigma^2 + (n-1)\mu^2\right) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$.

Pak $(B) = E\{(x_i - \mu)(\bar{x} - \mu)\} = \frac{\sigma^2}{n}$ a proto $(A) = E\{(x_i - \bar{x})^2\} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\frac{n-1}{n}$.

Shrnuto: $E\{(x_i - \bar{x})^2\} = \sigma^2\{(x_i - \bar{x})\} = \sigma^2\frac{n-1}{n}$.

Máme k dispozici náhodný výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ z normálního rozdělení s parametry $\mu = E\{x\}$ a $\sigma^2 = E\{(x-\mu)^2\}$. Pak $s^2(n) = \frac{1}{n-1}\left(\sigma^2 \frac{n-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2 =$

$= \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2$. Náhodná proměnná $\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$ má *N(0,1)* rozdělení a proto náhodná proměnná $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2$ má $\chi^2(n-1)$ rozdělení.

V dalším budeme řešit problém nalezení střední hodnoty a rozptylu náhodné proměnné $s(n) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2}$, k tomu je třeba stanovit

$E\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2}\right\} = E\left\{\sqrt{\chi^2(n-1)}\right\}$.

Pomocné tvrzení 3: $E\left\{\sqrt{\chi^2(n-1)}\right\} = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$.

Důkaz: $f_{\chi^2(n-1)}(x) = \frac{x^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ a odtud $f_{\sqrt{\chi^2(n-1)}}(x) = 2xf_{\chi^2(n-1)}(x^2) = \frac{x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. Potom

$$E\left\{\sqrt{\chi^2(n-1)}\right\} = \int_0^{+\infty} x\frac{x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}dx = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = (D)$$

Pro výpočet integrálu $\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ užijeme substituci $\frac{x^2}{2} = y \Rightarrow xdx = dy,\ x = 2^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, pak

$$(D) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{+\infty} y^{\frac{n-2}{2}}e^{-y}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Odtud dostaneme $E\{s(n)\} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = c_2(n)\sigma$, kde $c_2(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. Pro $c_2(n)$ lze odvodit následujícím způsobem rekurentní vztah:

$$c_2(n+1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \text{ ale } \frac{c_2(n+1)}{c_2(n)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2} = (E).$$

Protože platí $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dostaneme $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ a odtud

$$(E) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n-1}{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^2 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n-1}{2}\frac{2}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^2 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n-1}{n}\frac{1}{c_2^2(n)}.$$

Shrnuto: $\frac{c_2(n+1)}{c_2(n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n-1}{n}\frac{1}{c_2^2(n)} \Rightarrow \boxed{c_2(n+1) = \frac{n-1}{\sqrt{n(n+1)}}\frac{1}{c_2(n)}}$, kde

$$c_2(2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Shrnuto: $c_2(n+1) = \frac{n-1}{\sqrt{n(n+1)}}\frac{1}{c_2(n)}$ s počáteční podmínkou $c_2(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

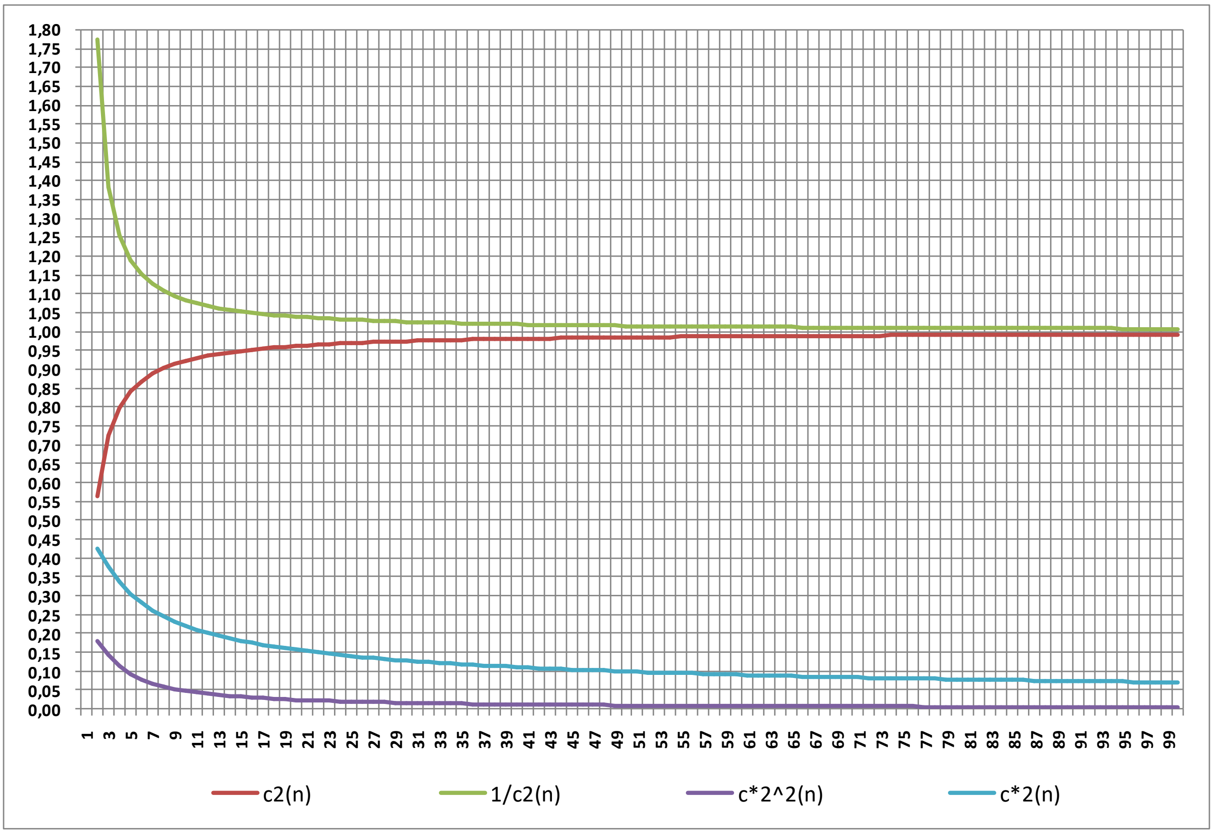
Poznámka: Konvence $E\{s(n)\} = c_2(n)\sigma$ je použita z Doc. Ing. Jan Kožíšek, CSc. : Statistická analýza. Statistické tabulky a jejich použití. Skripta ČVUT, fakulta strojní, Praha 1990. Někde se používá konvence otočená $E\{s(n)\} = \frac{1}{c_2(n)}\sigma$.

Dalším problémem bude stanovení rozptylu statistiky $s(n) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$, k tomu bude užit běžný postup $\sigma^2\{s(n)\} = E\{s^2(n)\} - \left(E\{s(n)\}\right)^2$. Ale $E\{s^2(n)\} = E\left\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n}(n-1)$.

Proto $\sigma^2\{s(n)\} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n} - c_2^2(n)\right) = \sigma^2 c_2^{*2}(n)$ a $\sigma\{s(n)\} = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n} - c_2^2(n)} = \sigma c_2^*(n)$.

Průběh uvedených „korekčních" konstant $c_2(n)$, $1/c_2(n)$, $c_2^{*2}(n)$, $c_2^*(n)$ je v následující tabulce a grafu:

n	$c_2(n)$	$1/c_2(n)$	$c_2^{*2}(n)$	$c_2^*(n)$
2	0,5642	1,7725	0,1817	0,4263
3	0,7236	1,3820	0,1431	0,3782
4	0,7979	1,2533	0,1134	0,3367
5	0,8407	1,1894	0,0931	0,3052
6	0,8686	1,1512	0,0788	0,2808
7	0,8882	1,1259	0,0682	0,2612
8	0,9027	1,1078	0,0601	0,2452
9	0,9139	1,0942	0,0537	0,2318
10	0,9227	1,0837	0,0485	0,2203
11	0,9300	1,0753	0,0443	0,2104
12	0,9359	1,0684	0,0407	0,2017
13	0,9410	1,0627	0,0376	0,1940
14	0,9453	1,0579	0,0350	0,1871
15	0,9490	1,0537	0,0327	0,1809
16	0,9523	1,0501	0,0307	0,1753
17	0,9551	1,0470	0,0289	0,1701
18	0,9576	1,0442	0,0274	0,1654
19	0,9599	1,0418	0,0259	0,1611
20	0,9619	1,0396	0,0247	0,1570
21	0,9638	1,0376	0,0235	0,1533
22	0,9655	1,0358	0,0225	0,1498
23	0,9670	1,0342	0,0215	0,1466
24	0,9684	1,0327	0,0206	0,1435
25	0,9696	1,0313	0,0198	0,1407



Výběrové variační rozpětí

Máme k dispozici náhodný výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ z normálního rozdělení s parametry $\mu = E\{x\}$ a $\sigma^2 = E\{(x-\mu)^2\}$.

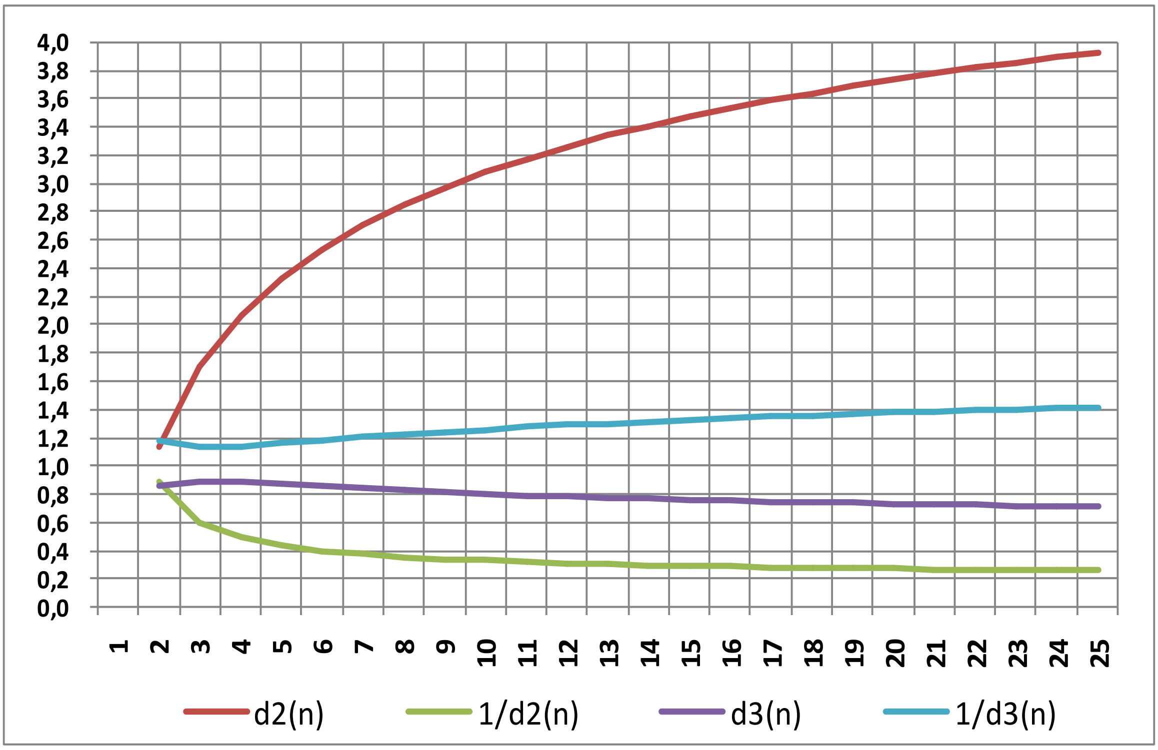
Pod variačním rozpětím takového výběru bude rozuměna statistika $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, $R = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} - \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Její střední hodnota pak bude $E\{R\} = E\{x_{(n)}\} - E\{x_{(1)}\}$.

Rozdělení maxima, obecně $f_{(n)}(x) = nF^{n-1}(x) f(x)$ a minima (taktéž obecně) $f_{(1)}(x) = n(1-F(x))^{n-1} f(x)$.

$R = (x_{(n)} - \mu) - (x_{(1)} - \mu) = \sigma\left(\frac{(x_{(n)} - \mu)}{\sigma} - \frac{(x_{(1)} - \mu)}{\sigma}\right)$, a protože evidentně platí $\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_{(i)}$ lze psát $R = \sigma(u_{(n)} - u_{(1)}) = \sigma w$, kde u je *N(0,1)* rozdělená náhodná proměnná a pro rozdělení jejího maxima a minima platí: $f_{(n)}(x) = n\Phi^{n-1}(x)\varphi(x)$ a $f_{(1)}(x) = n(1-\Phi(x))^{n-1}\varphi(x)$ a tomu odpovídající střední hodnoty: $E\{u_{(n)}\} = n\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi^{n-1}(x)\varphi(x)dx$ a $E\{u_{(1)}\} = n\int_{-\infty}^{+\infty} x(1-\Phi(x))^{n-1}\varphi(x)dx$. Protože $1-\Phi(x) = \Phi(-x)$ a $\varphi(x) = \varphi(-x)$, je $E\{u_{(1)}\} = -E\{u_{(n)}\}$ Odtud $E\{R\} = \sigma(E\{u_{(n)}\} - E\{u_{(1)}\}) = \sigma E\{w\} = 2\sigma E\{u_{(n)}\}$. Obvykle se užívá značení $E\{R\} = \sigma\, d_2(n)$. Odtud $d_2(n) = 2E\{u_{(n)}\}$. Tuto hodnotu lze poměrně snadno spočítat pomocí numerické integrace. Podobným způsobem (ale technicky řádově obtížnějším) se stanoví $\sigma^2\{R\} = \sigma^2\left(E\{(u_{(n)} - u_{(1)} - d_2(n))^2\}\right) = \sigma^2 d_3^2(n)$ nebo $\sigma\{R\} = \sigma d_3(n)$.

Oba koeficienty v závislosti na rozsahu náhodného výběru jsou v následující tabulce a grafu:

n	$d_2(n)$	$1/d_2(n)$	$d_3(n)$	$1/d_3(n)$
1	0,0000		0,0000	
2	1,1284	0,8862	0,8525	1,1730
3	1,6926	0,5908	0,8884	1,1256
4	2,0588	0,4857	0,8798	1,1366
5	2,3259	0,4299	0,8641	1,1573
6	2,5344	0,3946	0,8480	1,1792
7	2,7044	0,3698	0,8332	1,2002
8	2,8472	0,3512	0,8198	1,2198
9	2,9700	0,3367	0,8078	1,2379
10	3,0775	0,3249	0,7971	1,2545
11	3,1729	0,3152	0,7873	1,2702
12	3,2585	0,3069	0,7785	1,2845
13	3,3360	0,2998	0,7704	1,2980
14	3,4068	0,2935	0,7630	1,3106
15	3,4718	0,2880	0,7562	1,3224
16	3,5320	0,2831	0,7499	1,3335
17	3,5879	0,2787	0,7441	1,3439
18	3,6401	0,2747	0,7386	1,3539
19	3,6890	0,2711	0,7335	1,3633
20	3,7349	0,2677	0,7287	1,3723
21	3,7783	0,2647	0,7240	1,3812
22	3,8194	0,2618	0,7200	1,3889
23	3,8583	0,2592	0,7160	1,3966
24	3,8953	0,2567	0,7120	1,4045
25	3,9306	0,2544	0,7090	1,4104



Námět: Stanovte „korekční konstanty“ $d_2(n)$, $d_3(n)$ pro $n > 25$ s tím, že použijete předpokladu normality.

Kvantily maxima a minima

Opět máme k dispozici náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ z normálního rozdělení s parametry $\mu = E\{x\}$ a $\sigma^2 = E\{(x-\mu)^2\}$. $F(x) = P(x_i < x) = P\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Pro distribuční funkce maxima a minima pak platí:

$$F_{(n)}(x) = \Phi^n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_{(1)}(x) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^n$$, odtud pro odpovídající kvantily:

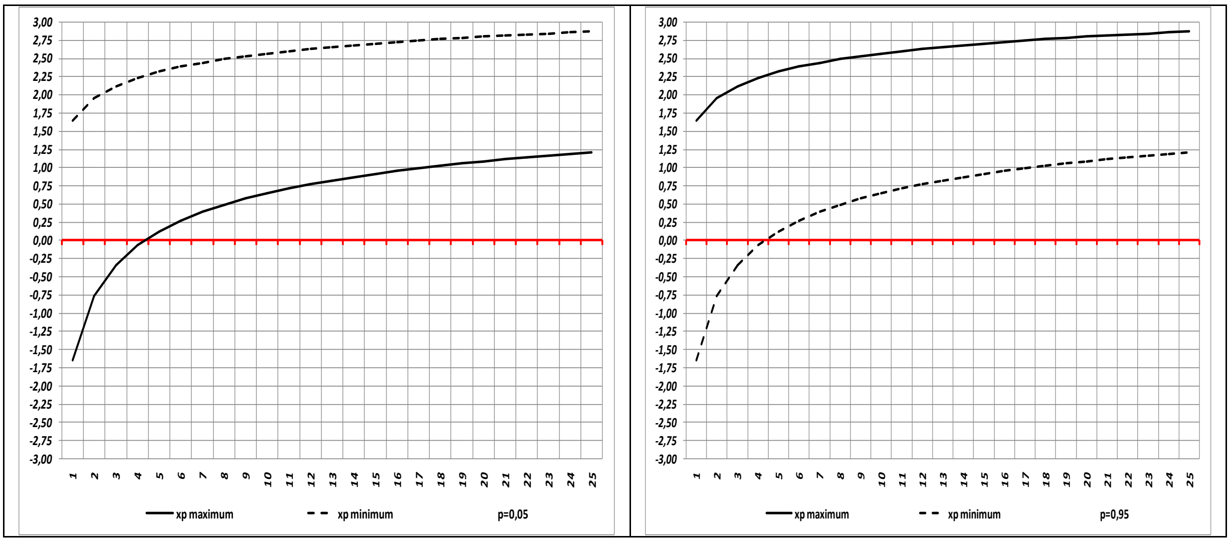
$$p_{(n)} = \Phi^n\left(\frac{x_{p_{(n)}} - \mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{x_{p_{(n)}} - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\sqrt[n]{p_{(n)}}\right) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x_{p_{(n)}} = \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\sqrt[n]{p_{(n)}}\right)}$$

$$p_{(1)} = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{x_{p_{(1)}} - \mu}{\sigma}\right)\right)^n \Rightarrow \frac{x_{p_{(1)}} - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(1 - \sqrt[n]{1 - p_{(1)}}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_{p_{(1)}} = \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(1 - \sqrt[n]{1 - p_{(1)}}\right)}$$

Průběh obou kvantilů při výběru z *N(0,1)* je v následující tabulce a grafu:

p=0,05			**p=0,95**		
n	$x_{p_{(n)}}$	$x_{p_{(1)}}$	n	$x_{p_{(n)}}$	$x_{p_{(1)}}$
1	-1,6449	1,6449	1	1,6449	-1,6449
2	-0,7601	1,9545	2	1,9545	-0,7601
3	-0,3361	2,1212	3	2,1212	-0,3361
4	-0,0681	2,2340	4	2,2340	-0,0681
5	0,1238	2,3187	5	2,3187	0,1238
6	0,2714	2,3862	6	2,3862	0,2714
7	0,3903	2,4421	7	2,4421	0,3903
8	0,4892	2,4898	8	2,4898	0,4892
9	0,5736	2,5312	9	2,5312	0,5736
10	0,6468	2,5679	10	2,5679	0,6468
11	0,7114	2,6007	11	2,6007	0,7114
12	0,7691	2,6303	12	2,6303	0,7691
13	0,8210	2,6574	13	2,6574	0,8210
14	0,8682	2,6822	14	2,6822	0,8682
15	0,9114	2,7051	15	2,7051	0,9114
16	0,9512	2,7265	16	2,7265	0,9512
17	0,9880	2,7464	17	2,7464	0,9880
18	1,0223	2,7651	18	2,7651	1,0223
19	1,0543	2,7826	19	2,7826	1,0543
20	1,0843	2,7992	20	2,7992	1,0843
21	1,1126	2,8149	21	2,8149	1,1126
22	1,1392	2,8298	22	2,8298	1,1392
23	1,1644	2,8440	23	2,8440	1,1644
24	1,1884	2,8575	24	2,8575	1,1884
25	1,2111	2,8704	25	2,8704	1,2111



Kvantilové pojetí se v novější době užívá pro data z ekonomické a finanční oblasti, kde je problematický předpoklad normálního rozdělení pravděpodobnosti (původní metodiky byly převážně vyvinuty pro technická data).

Shrnutí výsledků

- $E\{\bar{x}(n)\} = \mu$, pokud μ existuje,
- $E\{s^2(n)\} = \sigma^2$, pokud σ^2 existuje,
- $\sigma^2\{\bar{x}(n)\} = \dfrac{\sigma^2}{n}$,
- $\sigma^2\{s^2(n)\} = \dfrac{m_4}{n} - \dfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4$,
- $E\{s(n)\} = c_2(n)\sigma$, $c_2(n+1) = \dfrac{n-1}{\sqrt{n(n+1)}}\dfrac{1}{c_2(n)}$ s počáteční podmínkou $c_2(2) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$,
- $\sigma\{s(n)\} = \sigma\sqrt{\dfrac{n-1}{n} - c_2^2(n)} = \sigma c_2^*(n)$,
- $E\{R\} = \sigma\, d_2(n)$
- $\sigma^2\{\boldsymbol{R}\} = \sigma^2 \boldsymbol{d}_3^2(\boldsymbol{n})$ nebo $\sigma\{R\} = \sigma d_3(n)$,
- $\boldsymbol{x_{p_{(n)}} = \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\sqrt[n]{p_{(n)}}\right)}$
- $\boldsymbol{x_{p_{(1)}} = \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(1 - \sqrt[n]{1 - p_{(1)}}\right)}$

Statistická **kontrola jakosti** a statistická **přejímka** je statistikou **malých výběrů**.

Přejímky měřením – příklad

Bude předpokládáno, že jeden z jakostních znaků dodávky má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$s neznámými parametry μ, σ^2. Pro další práci s převzatými předměty dodávky potřebujeme, aby daný znak x nepřekročil hodnotu horní (toleranční) meze T_H. Potom $p = (x > T_H) = 1 - \Phi\left(\dfrac{T_H - \mu}{\sigma}\right)$představuje přijatelný podíl nevyhovujících předmětů v dodávce.

Vlastní testování pak vypadá tak, že se vybere n předmětů dodávky a zjistí se hodnoty daného (číselného) znaku, tím se získá náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. K tomuto se určí statistiky $\bar{x}, s = \sqrt{s^2}$. Pokud, pro dané k je $\bar{x} + ks \geq T_H$ dodávku nepřijmeme (to je ale deterministické tvrzení [ale v podmínce jsou náhodné proměnné], z něho pak usuzujeme na hodnotu $p = (x > T_H)$). Čísla $\boldsymbol{n, k}$ tvoří **„přejímací plán“**. Statistickou úlohou je stanovení takových čísel. K tomu jsou (navíc) zadaná dvě čísla $0 < p_1 < p_2 < 1$. Číslo p_1 znamená přijatelný podíl zmetků v dodávce (Acceptable Quality Level = **AQL**), číslo p_2 nepřijatelný podíl (Reject Quality Level = **RQL**).

Potom:

$P(\bar{x} + ks \geq T_H / p \leq p_1) = \alpha$ reprezentuje **riziko dodavatele** (je to pravděpodobnost zamítnutí dodávky, pokud je v pořádku = přijatelný podíl „zmetků“ je rovný nebo pod AQL).

$P\left(\bar{x}+ks \geq T_H / p \geq p_2\right)=1-\beta$ číslo β reprezentuje **riziko odběratele** (β je pravděpodobnost přijetí dodávky, pokud není v pořádku = přijatelný podíl zmetků je rovný nebo nad RQL).

Často je používaná „slabší“ formulace obou rizik:

$$P\left(\bar{x}+ks \geq T_H / p_1\right)=\alpha\,,\ \ P\left(\bar{x}+ks \geq T_H / p_2\right)=1-\beta$$

Námět: Diskutujte rozdíl obou formulací.

Statistickou úlohou je pro zadané $0<p_1<p_2<1,\ \alpha,\ \beta,\ T_H$ "spočítat" přejímací plán: n,k .

Budeme předpokládat, že za zadaných podmínek lze rozdělení statistiky $\bar{x}+ks$ ***aproximovat*** normálním rozdělením. Pak: $E\left\{\bar{x}+ks\right\}=\mu+k\sigma$, $\sigma^2\left(\bar{x}+ks\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2k^2}{2(n-1)}=\sigma^2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}\right)$ a

$\sigma\left(\bar{x}+ks\right)=\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}$.

Námět: Odvoďte předchozí vztahy.

Potom: $1-\alpha=P\left(\bar{x}+ks<T_H / p_1\right)=\Phi\left(\dfrac{T_H-\mu-k\sigma}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}}\right)=\Phi\left(\dfrac{u_{1-p_1}-k}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}}\right)$ a

$$\beta=P\left(\bar{x}+ks<T_H / p_2\right)=\Phi\left(\dfrac{u_{1-p_2}-k}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}}\right)$$, protože:

$1-F\left(T_H\right)=p_i \Rightarrow \dfrac{T_H-\mu}{\sigma}=u_{1-p_i}=\Phi^{-1}\left(1-p_i\right); i=1{,}2.$ A odtud dále: $u_{1-p_1}-k=u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}$ a

$u_{1-p_2}-k=u_{\beta}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}}$. Pak $\dfrac{u_{1-p_1}-k}{u_{1-p_2}-k}=\dfrac{u_{1-\alpha}}{u_{\beta}} \Rightarrow$ $\qquad k=\dfrac{-u_{1-p_1}u_{\beta}+u_{1-p_1}u_{1-\alpha}}{u_{1-\alpha}-u_{\beta}}$

Dále: $\left(\dfrac{u_{1-p_1}-k}{u_{1-\alpha}}\right)^2=\dfrac{1}{n}+\dfrac{k^2}{2(n-1)}$ vyřešením této rovnice vůči n při daném $k=\dfrac{-u_{1-p_1}u_{\beta}+u_{1-p_1}u_{1-\alpha}}{u_{1-\alpha}-u_{\beta}}$,

dostaneme kompletní přejímací plán: n,k .

Námět: Odvoďte přejímací plán při dané dolní toleranční mezi T_D, tj. dodávku zamítáme, pokud: $\bar{x} + ks \leq T_D$.

Námět: Odvoďte přejímací plán při dané dolní i horní toleranční mezi $T_D < T_H$, tj. dodávku zamítáme, pokud: $\left(\bar{x} + ks \leq T_D\right) \vee \left(\bar{x} + ks \geq T_H\right)$. Oba náměty za předpokladu normality.

Návod lze nalézt v Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974, str. 294-297.

Poznámka: Uvědomte si, že přejímající strategie je formulována tak, že přejímací plán nezávisí na hodnotě T_H . Samozřejmě, přejímací test je touto hodnotou vázán.

Doporučená a zdrojová literatura:

Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
Alfréd Rényi	Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972
Doc. Ing. Jan Kožíšek, CSc.	Statistická analýza. Statistické tabulky a jejich použití. Skripta ČVUT, fakulta strojní, Praha 1990.
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
Machek J.	Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK
Hušková M.	Sekvenční analýza. Praha 1982, skripta MFFUK
Mendenhall. W.	Introduction to Probability and Statistics. PWS-KENT, Publishing Company, Boston 1987.
Groebner, D.F., Shannon P. W.	Business Statistics. A Decision-Making Approach. Merrill Publishing Company, Columbus Ohio, 1989.
Douglas C. Montgomery	Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. John Wiley & Sons, August 2004.
	http://www.qualityamerica.com/knowledgecente/index.htm
	Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, MIL-STD-105D, Department of Defense, Washington D.C., April 29, 1963.
J.H.K.Kao	MIL-STD-414 Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective. Journal of Quality Technology, Vol.3, No.1,January 1971.
P.R.Nelson	Standard 414:Sampling Procedures and Inspection by Variables for Percent Defective. Journal of Quality Technology. Vol.9, No.2, April 1977.
	ČSN 01 0254 Statistická přejímka srovnáváním,Praha 1974. ČSN 01 0258 Statistická přejímka měřením, Praha 1981 ČSN 13 1140 Teplovody - Strojní část, Praha 1962 a jejich inovované verze (EN, ISO).
	B.S.600:1935 The Applications of Statistical Methods to Industrial Standardization and Quality Control, British Standards Institution, London 1960.

Další tip na některé české normy z dané oblasti.

1 Úvod

- požadavky na statistické přejímky v prvcích norem ISO řady 9000;
- způsoby prověřování dávek, míry jakosti výrobku, dávky a procesu;
- typy záruk při přejímání dávek výrobků, základní systémy a typy statistických přejímek;
- hlediska uplatňovaná při volbě systému přejímacích plánů a jejich typu (ISO/TR 8550).

2 Systémy statistických přejímacích postupů, při kontrole srovnáváním:

- přejímací plány AQL pro kontrolu každé dávky ze série od téhož dodavatele (ČSN ISO 2859 - 1);
- občasná přejímka dávek tvořících sérii od téhož dodavatele (ČSN ISO 2859-3);
- přejímací plány LQ pro kontrolu izolovaných dávek (ČSN ISO 2859-2);
- přejímky izolovaných dávek postupným výběrem (ČSN ISO 8422);
- postupy pro posouzení stanovených úrovní jakosti při auditech (ČSN ISO 2859-4);
- přejímací plány pro plynulou kontrolu při výrobě na páse (ČSN 01 0254);
- Dodgeovy - Romingovy opravné přejímací plány pro mezioperační kontrolu (ČSN 01 254).

3 Systémy statistických přejímacích postupů při kontrole měřením:

- přejímací plány AQL pro kontrolu každé dávky ze série od téhož dodavatele (ŠN ISO 3951);
- přejímací plány postupným výběrem (ČSN ISO 8423);
- přejímací plány postupným výběrem přihlížející k přítomnosti chyby ve výsledcích měření (ČSN 01 0256);
- vzorkování nekusových výrobků (ČSN 01 5110 až ČSN 01 5113);
-

Zdroj: Česká společnost pro jakost http://www.csq.cz/