Testování hypotéz – sekvenční testy (Waldovské)

Při klasickém testování se postupuje tak, že se stanoví přijatelná chyba prvního druhu a hledá se (stejnoměrně) nejsilnější test minimalizující chybu druhého druhu, při omezení daném přijatelnou hladinou chyby prvního druhu. Rozsah náhodného výběru je buď předem dán, nebo je pro proceduru testování předem určen. V každém případě je v průběhu testu neměnný. To může někdy komplikovat reálné postupy získávání dat a i vést k problematickým výsledkům (při malém rozsahu to může vést na přijetí rozhodnutí s „příliš velkou chybou“, …). Proto A. Wald navrhl a ve své práci „WALD, A.: Sequential analysis, Wiley 1950“ publikoval následující metodiku „sekvenčního testování“.

Podstata testu bude prezentována na testu jednoduché hypotézy: jednotlivá pozorování náhodného výběru $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ se řídí rozdělením s hustotou (pravděpodobností v diskrétním případě) $f_H(x)$ proti jednoduché alternativě: pozorování se řídí rozdělením s hustotou $f_A(x)$, kde obě hustoty mají společný nosič D a platí $\exists x \in D; f_H(x) \neq f_A(x)$. Pro daný počet pozorování se realizuje procedura testu a ta buď rozhodne pro přijetí hypotézy ***H*** nebo její zamítnutí ve prospěch ***A*** nebo o pokračování testu (testová procedura tedy nedokázala rozhodnout) získáním dalšího (dalších) pozorování a opakování procedury pro zvětšený rozsah náhodného výběru. Procedura se opakuje tak dlouho (tak dlouho se doplňují nová pozorování) dokud test nerozhodne.

V souvislosti s takovým postupem se objevuje řada otázek:

1. Rozhodne test za konečný počet kroků (s pravděpodobností jedna, ve střední hodnotě, …)?
2. Pokud daný počet kroků bude „konečný“ je takový počet „srovnatelný“ s požadovaným rozsahem výběru při klasickém testování, při „srovnatelných“ požadavcích na chyby prvního a druhého druhu?
3. Existuje právě jedna testovací procedura s nejmenším počtem kroků (ve střední hodnotě, …) nebo je jich více?
4. Jaké jsou „klasické“ vlastnosti takového testu (stejnoměrnost pro složené alternativy, vydatnost testů, …)?
5. Vzhledem k tomu, že při takové proceduře je rozsah výběru náhodná proměnná, jaké jsou její pravděpodobnostní a statistické vlastnosti?
6. ….

V této přednášce nebudou řešeny všechny uvedené a i neuvedené problémy, budou naznačena řešení těch, které lze považovat za základní a potřebné pro vlastní návrh a užití některých testů. Pro další lze odkázat na dále uvedenou nebo jinou literaturu.

V literatuře zabývající se sekvenčními testy se často používá odchylného značení od klasických (nesekvenčních) testů, proto:

Pravděpodobnost chyby prvního druhu: $P(\text{zamítá se H/H platí}) = \alpha$

Pravděpodobnost chyby druhého druhu:

$$P(\text{zamítá se A/A platí}) = P(\text{prijímá se H/H neplatí}) = \beta$$

Tradiční Waldův text má následující strukturu (pro jednoduchou hypotézu a pro jednoduchou alternativu):

1. Přijmeme hypotézu ***H***, pokud: $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \leq b$,
2. přijmeme alternativu ***A*** (nepřijmeme hypotézu ***H***), pokud: $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \geq a$,
3. pokračujeme v pozorování (doplníme náhodný výběr), pokud: $b < \prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} < a$,

kde, čísla a, b jsou volena tak, aby byly dodrženy požadované hodnoty chyb pravděpodobností prvého a druhého druhu.

Za daného typu úlohy je důležité číslo $N = \min\left\{ n; \prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \notin (b, a) \right\}$, tj. nejmenší počet kroků za který testování skončí. Je zřejmé, že takový počet kroků je náhodnou veličinou.

Problémem je určit daná čísla a, b. Lze však pro ně dostat jejich aproximace $\hat{b} = \frac{\beta}{1-\alpha}; \hat{a} = \frac{1-\beta}{\alpha}$. Jejich odvození a diskusi lze nalézt v: Marie Hušková: Sekvenční analýza, skripta MFF-UK, Praha 1982, str. 10-11, 33-34 nebo C. Radhakrishna Rao: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978, str. 518-520. Výhodou takové aproximace je, že nezávisí na typu rozdělení použitého pro formulaci hypotézy a alternativy. Naopak nevýhodou může být, že oproti teoretickým mezím může docházet k zvýšení potřebného počtu kroků k ukončení testu. Použití takové aproximace také dává omezení na možnou volbu hodnot chyb prvního a druhého druhu. Protože musí platit: $\hat{b} < \hat{a}$ je potřebné, aby bylo splněno $\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{1-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$. Taková podmínka nebude v praktických úlohách činit většinou problémy.

Příklad hodnot $\hat{b}$

α / β	**0,010**	**0,020**	**0,030**	**0,040**	**0,050**	**0,060**	**0,070**	**0,080**	**0,090**	**0,100**
0,010	0,010	0,020	0,030	0,040	0,051	0,061	0,071	0,081	0,091	0,101
0,020	0,010	0,020	0,031	0,041	0,051	0,061	0,071	0,082	0,092	0,102
0,030	0,010	0,021	0,031	0,041	0,052	0,062	0,072	0,082	0,093	0,103
0,040	0,010	0,021	0,031	0,042	0,052	0,063	0,073	0,083	0,094	0,104
0,050	0,011	0,021	0,032	0,042	0,053	0,063	0,074	0,084	0,095	0,105
0,060	0,011	0,021	0,032	0,043	0,053	0,064	0,074	0,085	0,096	0,106
0,070	0,011	0,022	0,032	0,043	0,054	0,065	0,075	0,086	0,097	0,108
0,080	0,011	0,022	0,033	0,043	0,054	0,065	0,076	0,087	0,098	0,109
0,090	0,011	0,022	0,033	0,044	0,055	0,066	0,077	0,088	0,099	0,110
0,100	0,011	0,022	0,033	0,044	0,056	0,067	0,078	0,089	0,100	0,111

Příklady hodnot $\hat{a}$										
α / β	**0,010**	**0,020**	**0,030**	**0,040**	**0,050**	**0,060**	**0,070**	**0,080**	**0,090**	**0,100**
0,010	99,000	98,000	97,000	96,000	95,000	94,000	93,000	92,000	91,000	90,000
0,020	49,500	49,000	48,500	48,000	47,500	47,000	46,500	46,000	45,500	45,000
0,030	33,000	32,667	32,333	32,000	31,667	31,333	31,000	30,667	30,333	30,000
0,040	24,750	24,500	24,250	24,000	23,750	23,500	23,250	23,000	22,750	22,500
0,050	19,800	19,600	19,400	19,200	19,000	18,800	18,600	18,400	18,200	18,000
0,060	16,500	16,333	16,167	16,000	15,833	15,667	15,500	15,333	15,167	15,000
0,070	14,143	14,000	13,857	13,714	13,571	13,429	13,286	13,143	13,000	12,857
0,080	12,375	12,250	12,125	12,000	11,875	11,750	11,625	11,500	11,375	11,250
0,090	11,000	10,889	10,778	10,667	10,556	10,444	10,333	10,222	10,111	10,000
0,100	9,900	9,800	9,700	9,600	9,500	9,400	9,300	9,200	9,100	9,000

Příklad: Testujeme hypotézu ***H***: pozorování jsou z rozdělení s hustotou $f_H(x) = \lambda_H e^{-\lambda_H x}; x \geq 0$ proti alternativě ***A***: pozorování jsou z rozdělení s hustotou $f_A(x) = \lambda_A e^{-\lambda_A x}; x \geq 0$, $\lambda_H, \lambda_A > 0$.

Nejprve určíme výraz $\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\ e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$. Potom pro poměr $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)}$ platí

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} = \frac{\lambda_A^n}{\lambda_H^n} e^{-\lambda_A \sum_{i=1}^{n} x_i} e^{+\lambda_H \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\lambda_A^n}{\lambda_H^n} e^{(\lambda_H - \lambda_A)\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

, pak pro oblast nerozhodnutí platí (při využití výše uvedených aproximací)

$$\left[\hat{b} < \frac{\lambda_A^n}{\lambda_H^n} e^{(\lambda_H - \lambda_A)\sum_{i=1}^{n} x_i} < \hat{a}\right] \Leftrightarrow \left[lg\,\hat{b} < n\,lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H} + n(\lambda_H - \lambda_A)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i < lg\,\hat{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{n} lg\,\hat{b} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H} < (\lambda_H - \lambda_A)\bar{x} < \frac{1}{n} lg\,\hat{a} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}\right].$$

Pro variantu $\lambda_H > \lambda_A$ dostaneme $\left[\frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{b} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)} < \bar{x} < \frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{a} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)}\right]$. Potom:

Pokud $\bar{x} \leq \frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{b} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)}$ přijímáme hypotézu $\lambda = \lambda_H$

$\frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{b} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)} < \bar{x} < \frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{a} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)}$ pokračujeme v pozorování

$\bar{x} \geq \frac{\frac{1}{n} lg\,\hat{a} - lg\,\frac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)}$ přijímáme alternativu $\lambda = \lambda_A$

Příklad rozhodovacích mezí pro pozorovaný průměr (pro uvedenou hypotézu a alternativu):

Hypotéza: λ **=** 5
Alternativa: λ **=** 2
Počet pozorování: 10

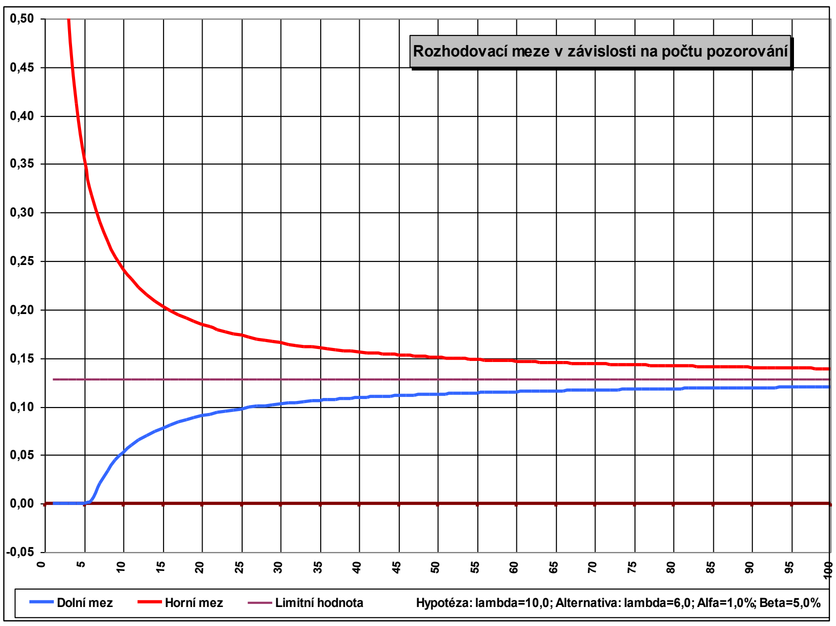
Dolní mez pro průměr pozorování

α / β	**0,010**	**0,020**	**0,030**	**0,040**	**0,050**	**0,060**	**0,070**	**0,080**	**0,090**	**0,100**
0,010	0,152	0,175	0,189	0,198	0,206	0,212	0,217	0,222	0,226	0,229
0,020	0,153	0,176	0,189	0,199	0,206	0,212	0,217	0,222	0,226	0,229
0,030	0,153	0,176	0,190	0,199	0,207	0,213	0,218	0,222	0,226	0,230
0,040	0,153	0,176	0,190	0,199	0,207	0,213	0,218	0,223	0,227	0,230
0,050	0,154	0,177	0,190	0,200	0,207	0,213	0,218	0,223	0,227	0,230
0,060	0,154	0,177	0,191	0,200	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231
0,070	0,154	0,177	0,191	0,201	0,208	0,214	0,219	0,224	0,228	0,231
0,080	0,155	0,178	0,191	0,201	0,208	0,214	0,220	0,224	0,228	0,231
0,090	0,155	0,178	0,192	0,201	0,209	0,215	0,220	0,224	0,228	0,232
0,100	0,155	0,179	0,192	0,202	0,209	0,215	0,220	0,225	0,229	0,232

Horní mez pro průměr pozorování

α / β	**0,010**	**0,020**	**0,030**	**0,040**	**0,050**	**0,060**	**0,070**	**0,080**	**0,090**	**0,100**
0,010	0,459	0,458	0,458	0,458	0,457	0,457	0,457	0,456	0,456	0,455
0,020	0,435	0,435	0,435	0,434	0,434	0,434	0,433	0,433	0,433	0,432
0,030	0,422	0,422	0,421	0,421	0,421	0,420	0,420	0,420	0,419	0,419
0,040	0,412	0,412	0,412	0,411	0,411	0,411	0,410	0,410	0,410	0,409
0,050	0,405	0,405	0,404	0,404	0,404	0,403	0,403	0,403	0,402	0,402
0,060	0,399	0,399	0,398	0,398	0,398	0,397	0,397	0,396	0,396	0,396
0,070	0,394	0,393	0,393	0,393	0,392	0,392	0,392	0,391	0,391	0,391
0,080	0,389	0,389	0,389	0,388	0,388	0,388	0,387	0,387	0,386	0,386
0,090	0,385	0,385	0,385	0,384	0,384	0,384	0,383	0,383	0,383	0,382
0,100	0,382	0,382	0,381	0,381	0,380	0,380	0,380	0,379	0,379	0,379

Závislost rozhodovacích mezí na počtu pozorování (= kroku sekvenční procedury)



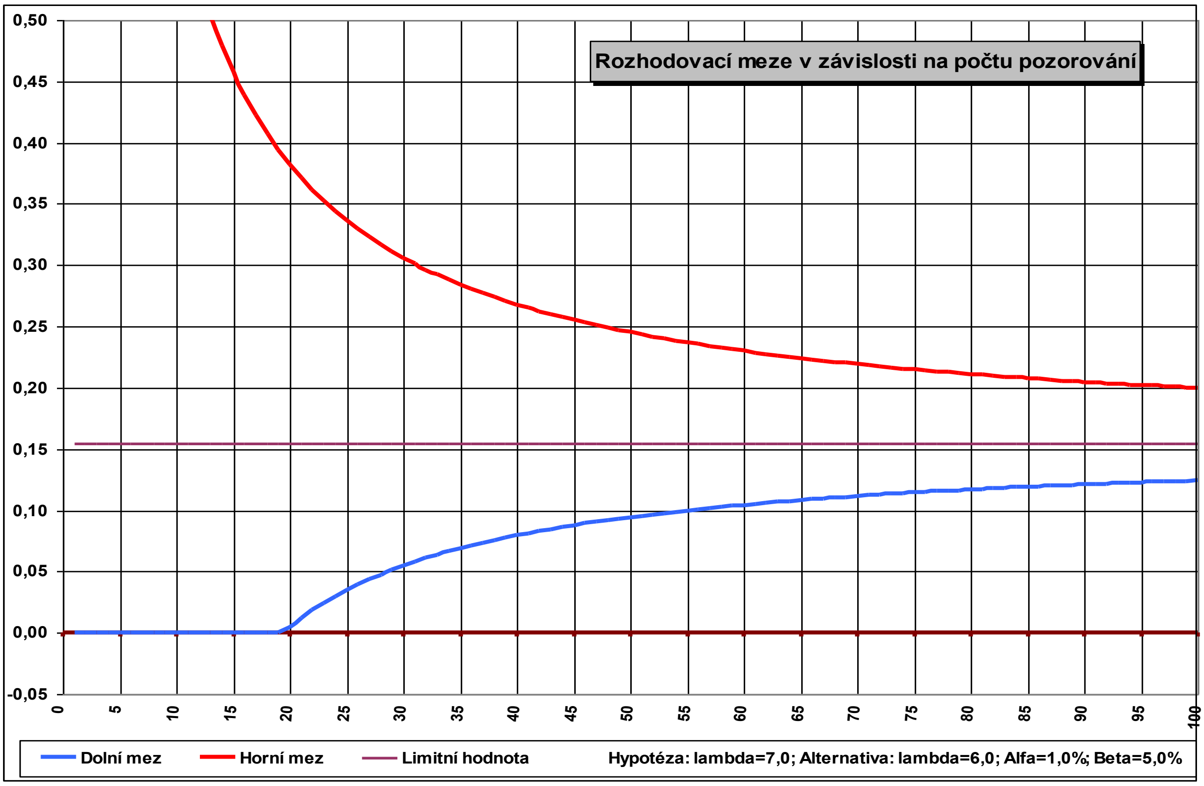
Počet pozorování	Dolní mez	Horní mez	Limitní hodnota
1	0,00	1,27	0,13
2	0,00	0,70	0,13
3	0,00	0,51	0,13
4	0,00	0,41	0,13
5	0,00	0,36	0,13
6	0,00	0,32	0,13
7	0,02	0,29	0,13
….	….	….	….
96	0,12	0,14	0,13
97	0,12	0,14	0,13
98	0,12	0,14	0,13
99	0,12	0,14	0,13
100	0,12	0,14	0,13

Námět: Co znamená a jak to bude interpretováno, pokud vyjde $\dfrac{\frac{1}{n} lg\, \hat{b} - lg \dfrac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)} \leq 0$.

Námět: Co znamená a jak to bude interpretována $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{n} lg\, \hat{b} - lg \dfrac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)} = \dfrac{- lg \dfrac{\lambda_A}{\lambda_H}}{(\lambda_H - \lambda_A)}$.

Námět: Určete rozhodovací pravidla takového testu pro $\lambda_H < \lambda_A$.

Průběh rozhodovacích mezí pro jinou hypotézu a alternativu.



Srovnáním obou obrázků lze vyslovit hypotézu (ne statistickou ale formulační) o tom, že „rozhodovací schopnost“ testu (i optimálního – viz dále) závisí podstatně na tom „co je testováno“ (zde je hypotéza blízká alternativě). Proto následující pojmy (některé i opakovaně):

Operační charakteristika testu

Obvykle bývá formulována pro parametrické testy. Operační charakteristikou testu **S** hypotézy ***H*** proti alternativě *A* se nazývá funkce „testovaného parametru“ ***p***, která udává pravděpodobnost přijetí ***H*** při skutečné hodnotě parametru ***p***:

$$L_S(p) = P\{\text{prijeti H testem S; pokud je hodnota "testovaneho parametru"} = p\}$$

Síla testu

Opět formulace pro parametrické testy. Sílou testu **S** hypotézy ***H*** proti alternativě ***A*** se nazývá funkce „testovaného parametru“ ***p***, která udává pravděpodobnost zamítnutí ***H*** při skutečné hodnotě parametru ***p***:

$$P_S(p) = P\{\text{zamitnuti H testem S; pokud je hodnota "testovaneho parametru"} = p\}$$

Rozsah výběru (potřebný rozsah výběru pro rozhodnutí)

Náhodná proměnná $N = min\left\{n; \prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \notin (b,a)\right\}$ (viz i výše) bude nazývána rozsahem výběru a její střední hodnota $E\{N\}$ středním rozsahem výběru (obecně při testu **S**) při parametrickém testu o parametru ***p*** bude značena $E_S(N;p)$[1].

Označení: Pro náhodný výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ při parametrickém testu bude používáno značení $Z_i(p_1,p_2) = \lg \frac{f(x_i;p_2)}{f(x_i;p_1)}$ a $Q_n(p_1,p_2) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(p_1,p_2) = \sum_{i=1}^{n} \lg \frac{f(x_i;p_2)}{f(x_i;p_1)} = \lg \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i;p_2)}{f(x_i;p_1)}$, tedy jedná se o logaritmus poměru pravděpodobností (věrohodností) pro daný náhodný výběr. Hodnota parametru $p = p_1$ může být chápána jako jednoduchá hypotéza a hodnota parametru $p = p_2$ jako její jednoduchá alternativa. Obdobně lze veličinu $Z_i(p_1,p_2)$ zavést pomocí daných hypotéz $Z_i(H,A) = lg \frac{f(x_i/A)}{f(x_i/H)}$. Za uvedených předpokladů jsou veličiny Z_i nezávislé a

$Q_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$ je vlastně transformací rozhodovacího poměru, protože:

1. $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \le b \Leftrightarrow Q_n \le \lg b = B$
2. $b < \prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} < a \Leftrightarrow \lg b = B < Q_n < \lg a = A$
3. $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} \ge a \Leftrightarrow Q_n \ge \lg a = A$

Vše za předpokladu $f_H(x_i) \ne 0; \forall i = 1,...,n$

S pomocí zavedených pojmů lze každé rozhodování pomocí testu poměrem pravděpodobností (věrohodností) převést na test zda součet daného (ale náhodného) počtu n nezávislých a stejně rozdělených náhodných proměnných je:

1. $\sum_{i=1}^{n} z_i \le B \Leftrightarrow Q_n \le B$
2. $B < \sum_{i=1}^{n} z_i < A \Leftrightarrow B < Q_n < A$
3. $A \le \sum_{i=1}^{n} z_i \Leftrightarrow A \le Q_n$

Tvrzení: Waldův test „rozhodne za konečný počet kroků“, tj. $P(n < +\infty) = 1$

Důkaz:

$$\forall m > 0; P(n > m) = P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}\left(B < \sum_{i=1}^{k} z_i < A\right)\right) = P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}\left(b < \prod_{i=1}^{k} \frac{f_A(x_i)}{f_H(x_i)} < a\right)\right) = P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}(B < Q_k < A)\right).$$

Dále $Q_k = Q_{k-1} + z_k$ a Q_{k-1} a z_k jsou nezávislé a

[1] Zavedené pojmy „operační charakteristika“, „síla testu“, „rozsah výběru“ a „střední rozsah výběru“ jsou definovány pro obecnou formulaci testu, nejen pro klasické Waldovy testy poměrem věrohodností (pravděpodobností).

$P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}(B<Q_k<A)\right)=P\left((B<Q_m<A)/\bigwedge_{k=1}^{m-1}(B<Q_k<A)\right)P\left(\bigwedge_{k=1}^{m-1}(B<Q_k<A)\right)$. Pokud bude platit $P\left((B<Q_m<A)/\bigwedge_{k=1}^{m-1}(B<Q_k<A)\right)<\alpha; 0\le\alpha<1; \forall m>0$ pak $P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}(B<Q_k<A)\right)<\alpha P\left(\bigwedge_{k=1}^{m-1}(B<Q_k<A)\right)$ a $P\left(\bigwedge_{k=1}^{m}(B<Q_k<A)\right)<\alpha^{m-1}P((B<z_1<A))$. Potom za uvedeného předpokladu $\lim_{m\to+\infty}P(n>m)=0$.
K tomu závěru zbývá dokázat, že existuje $\alpha; 0\le\alpha<1$ takové, že $P\left((B<Q_m<A)/\bigwedge_{k=1}^{m-1}(B<Q_k<A)\right)<\alpha \quad \forall m>0$. Volněji řečeno a **námět**: Pravděpodobnost toho, že po přidání dalšího sčítance do součtu nezávislých a stejně rozdělených náhodných proměnných tento součet zůstane v zadaném intervalu, pokud tam byly všechny předchozí částečné součty je shora omezena nějakým $\alpha; 0\le\alpha<1$.
Jiný důkaz uvedeného tvrzení lze nalézt v knize C. Radhakrishna Rao: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978, str. 521 (ten je však za „trochu“ obecnějších předpokladů).

Pomocné tvrzení: Pro každou náhodnou proměnnou n nabývající hodnoty z množiny $\{0,1,2,3,4,\ldots,\}$ platí: $E\{n\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P(n\ge i)$.

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
E\{n\}=0P(n=0)+1P(n=1)+2P(n=2)+3P(n=3)+\ldots&=1P(n=1)+2P(n=2)+3P(n=3)+\ldots=\\
&=1P(n=1)+2P(n=2)+3P(n=3)+\ldots\\
&=P(n=1)+\quad P(n=2)+\ P(n=3)+\ldots.\\
&+\qquad\qquad\quad P(n=2)+P(n=3)+\ldots\\
&+\qquad\qquad\qquad\qquad\quad P(n=3)+\ldots..=\\
&=P(n\ge1)+\\
&+P(n\ge2)+\\
&+P(n\ge3)+\ldots.
\end{aligned}
$$

Poznámka: uvedená střední hodnota může být i nevlastní.

Pomocné (ale důležité – hlavně v dalších aplikacích) **tvrzení**: Nechť existuje $E\{z_i\}=E\{z\}$, pak platí $E\{Q_n\}=E\{n\}E\{z\}$.

Důkaz:

1. **Námět:** pomocí aparátu charakteristických funkcí.
2. Jiný ale názornější. Mějme posloupnost pozorování náhodné veličiny $z:\{z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots\}$ ***iid***. Nechť existuje $E\{z\}$. Dále mějme nějaký rozhodovací proces, který k rozhodování používá pozorování $\{z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots\}$. Pokud jsou daná pozorování postačující k rozhodnutí, je rozhodnuto a proces končí, pokud nepostačující je pokračováno v pozorování – získávání dalších z_i. Nechť proces končí v okamžiku $\boldsymbol{n}$ (markovský čas).
   Zavedeme náhodnou proměnnou $y_i=1\Leftrightarrow$ pokud rozhodnutí nebylo učiněno do $i-1$-ho kroku, včetně a $y_i=0\Leftrightarrow$ pokud rozhodnutí bylo učiněno v některém z kroků

$1,2,...,i-1=$ v některém z předcházejících kroků. Potom $Q_n = \sum_{i=1}^{+\infty} y_i z_i$. Z toho jak byly zavedeny y_i plyne, že y_i a z_i jsou nezávislé.

Dále $E\{y_i\} = 0 * P(y_i = 0) + 1 * P(y_i = 1) = P(y_i = 1) = P(n \geq i)$.

Potom:

$$E\{Q_n\} = \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i z_i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i\} E\{z_i\} = E\{z\} \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i\} = E\{z\} \sum_{i=1}^{+\infty} P(n \geq i) = E\{z\} E\{n\}.$$

Námět (pro náročné): ověřte (pro klasický Waldův test) korektnost záměny operátoru střední hodnoty a nekonečné sumace.

Pomocné tvrzení: Při existenci konečné $E\{z\}$ a platnosti hypotézy platí $E\{z\} \leq 0$, obdobně při platnosti alternativy platí $E\{z\} \geq 0$.

Důkaz: $E_H\{z\} = E_H\{z(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x/H) \lg \frac{f(x/A)}{f(x/H)} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/H) \lg \frac{f(x/H)}{f(x/A)} dx \leq 0$, neboť podle Jensenovy nerovnosti platí: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/H) \lg \frac{f(x/H)}{f(x/A)} dx \geq 0$. Druhá část je analogická.

Poznámka: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/H) \lg \frac{f(x/H)}{f(x/A)} dx = D\left(f(*/H) \| f(*/A)\right)$ je divergencí obou pravděpodobnostních modelů.

Tvrzení: Střední hodnota počtu kroků pro rozhodnutí je konečná za předpokladu existence konečné $E\{|z|\}$.

Důkaz:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} E\{|y_i z_i|\} = \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i |z_i|\} = \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i\} E\{|z_i|\} = E\{|z|\} \sum_{i=1}^{+\infty} E\{y_i\} = E\{|z|\} \sum_{i=1}^{+\infty} P(n \geq i) = E\{|z|\} E\{n\}$$

Námět: formulujte podmínky existence konečné $E\{|z|\}$. Použijte vlastností divergence pravděpodobnostních modelů. Obdobné tvrzení, opět za obecnějších předpokladů, je formulováno a dokázáno v C. Radhakrishna Rao: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978, str. 522-523.

Výše uvedená tvrzení dále budou sloužit k důkazu, že Waldův test je „efektivnější“ než jiné sekvenční testy a počet potřebných pozorování (konečný rozsah náhodného výběru) se „moc neliší“ od nesekvenčních testů.

Tvrzení: Platí $E\{n/H\} \cong \frac{B(1-\alpha) + A\alpha}{E\{z/H\}} = \frac{B(1-\alpha) + A\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/H) \lg \frac{f(x/A)}{f(x/H)} dx} = \frac{B(1-\alpha) + A\alpha}{-D\left(f(*/H) \| f(*/A)\right)}$.

Dále platí: $E\{n/A\} \cong \frac{B\beta + A(1-\beta)}{E\{z/A\}} = \frac{B\beta + A(1-\beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/A) \lg \frac{f(x/A)}{f(x/H)} dx} = \frac{B\beta + A(1-\beta)}{D\left(f(*/A) \| f(*/H)\right)}$.

Důkaz: Podle výše uvedeného obecného vztahu $E\{Q_n\} = E\{z\}E\{n\}$ lze psát $E\{Q_n / H\} = E\{z / H\}E\{n / H\}$, odtud $E\{n / H\} = \dfrac{E\{Q_n / H\}}{E\{z / H\}}$. Ale

$$E\{Q_n / H\} = P(Q_n \le B)E\{Q_n / Q_n \le B\} + P(Q_n \ge A)E\{Q_n / Q_n \ge A\}.$$

Dále $E\{Q_n / Q_n \le B\} \cong B$ a $E\{Q_n / Q_n \ge A\} \cong A$ (bude vysvětleno dále). Potom

$$E\{n / H\} = \frac{P(Q_n \le B)E\{Q_n / Q_n \le B\} + P(Q_n \ge A)E\{Q_n / Q_n \ge A\}}{E\{z / H\}} \cong \frac{P(Q_n \le B)B + P(Q_n \ge A)A}{E\{z / H\}}.$$

Protože v daném kontextu $P(Q_n \le B) = P(\text{prijmeme H/H plati}) = 1 - \alpha$ a

$$P(Q_n \ge A) = P(\text{prijmeme A/H plati}) = P(\text{zamitneme H/H plati}) = \alpha.$$

Proto $E\{n / H\} \cong \dfrac{(1-\alpha)B + \alpha A}{E\{z / H\}}$**.** Tj. čím „větší“ odpovídající **divergence modelů**, tím menší je střední počet kroků k dosažení rozhodnutí.

Námět: Počet kroků je kladný ale $E\{z / H\}$ „je záporné“, není zde problém?

Odhady $E\{Q_n / Q_n \le B\} \cong B$, $E\{Q_n / Q_n \ge A\} \cong A$; je evidentní, že $E\{Q_n / Q_n \le B\} \le B$ a $E\{Q_n / Q_n \ge A\} \ge A$. Uvedenými odhady zanedbáváme „část středních hodnot“, při rozhodnutí (= překročení jedné z obou mezí).

Námět: Podobným způsoben dokažte druhý odhad.

Námět: Oba odhady $E\{n / H\} \cong \dfrac{B(1-\alpha) + A\alpha}{E\{z / H\}}$ a $E\{n / A\} \cong \dfrac{B\beta + A(1-\beta)}{E\{z / A\}}$ formulujte zcela exaktně formou nerovností. Návod: viz např. C. Radhakrishna Rao: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978, str. 523-525.

Doporučená a zdrojová literatura:

Jiří Reif	Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004
Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
Alfréd Rényi	Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972
Jana Jurečková	Testy parametrických hypotéz, skripta MFF-UK, Praha 1982.
Marie Hušková	Sekvenční analýza, skripta MFF-UK, Praha 1982
A. Wald	Sequential Tests of Statistical Hypotheses, euclid.aoms.1177731118. Dostupné z: https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177731118