Opakování pravděpodobnostních pojmů I.

Distribuční funkce spojité „jednorozměrné“ náhodné proměnné

Mějme náhodnou proměnnou ξ, která je definována na některé části reálné osy R_1, potom pod její distribuční funkcí budeme rozumět $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Obvykle se distribuční funkce dodefinovává pro celou R_1 a to tak, že pro definiční obor D náhodné proměnné ξ a mimo něj:

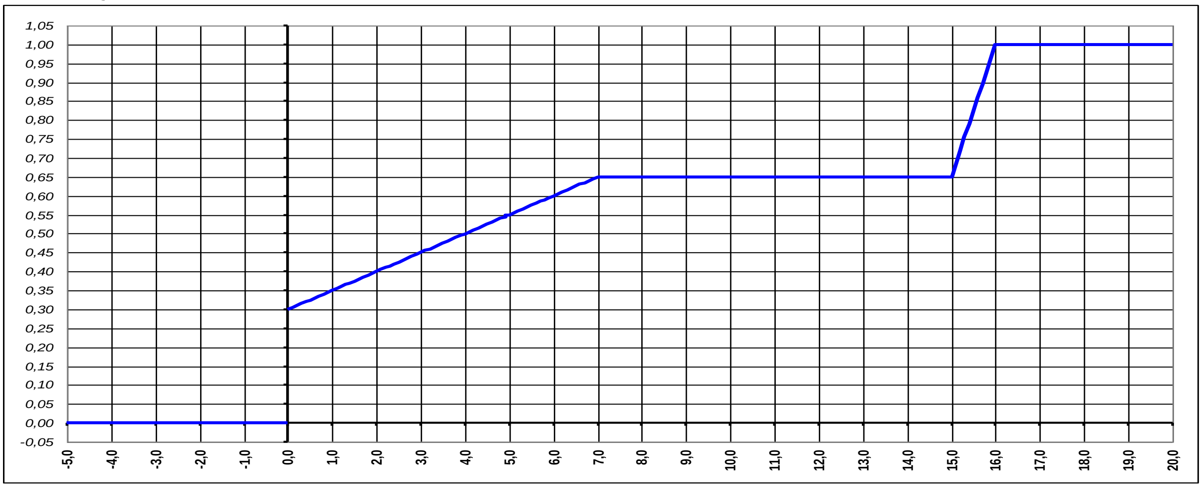
1. Pro $x \in D$, platí $F_\xi(x) = P(\xi < x)$
2. Pro x takové, že $\forall y \in D \Rightarrow x < y$, $F_\xi(x) = 0$
3. Pro x takové, že $\forall y \in D \Rightarrow x > y$, $F_\xi(x) = 1$
4. Pokud D není souvislý pak pro bod $x : x \notin D; \inf(D) < x < \sup(D)$ je „dodefinováno“ $F_\xi(x) = \sup\{F_\xi(z) : z \in D; z < x\}$. Poznámka, striktně řečeno nejedná se o dodefinování.

Vlastnosti

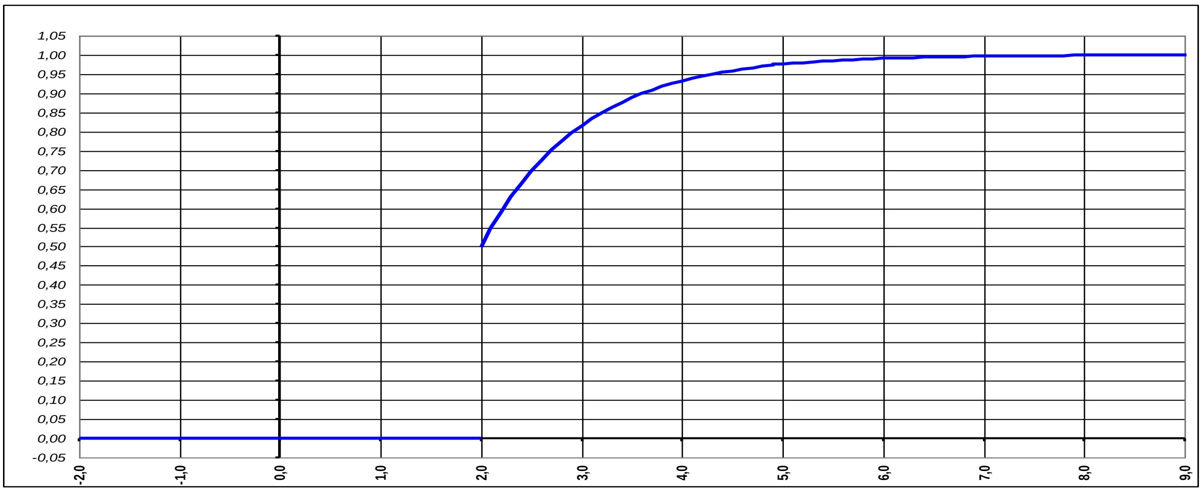
1. $F_\xi(x)$ je neklesající.
2. $F_\xi(x)$ je zleva spojitá.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.
5. $F_\xi(x)$ je shora i zdola omezená. Tato vlastnost je nadbytečná, lze ji dokázat z předchozích čtyř.

Každá distribuční funkce má uvedené vlastnosti 1-4. Každá funkce mající uvedené vlastnosti 1-4 je distribuční nějaké náhodné proměnné.
Námět: dokažte předcházející vlastnosti.

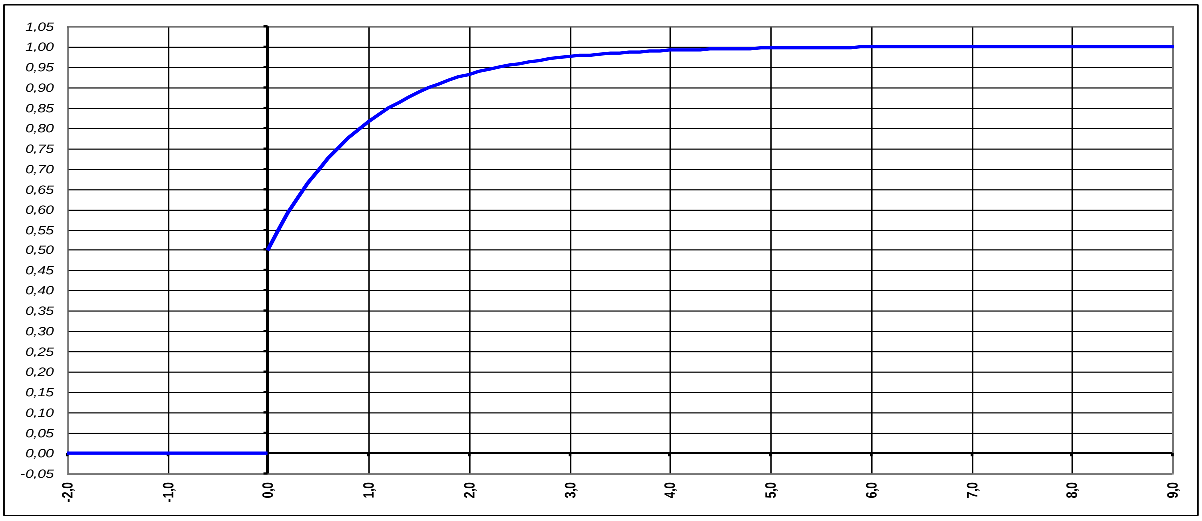
Příklady:



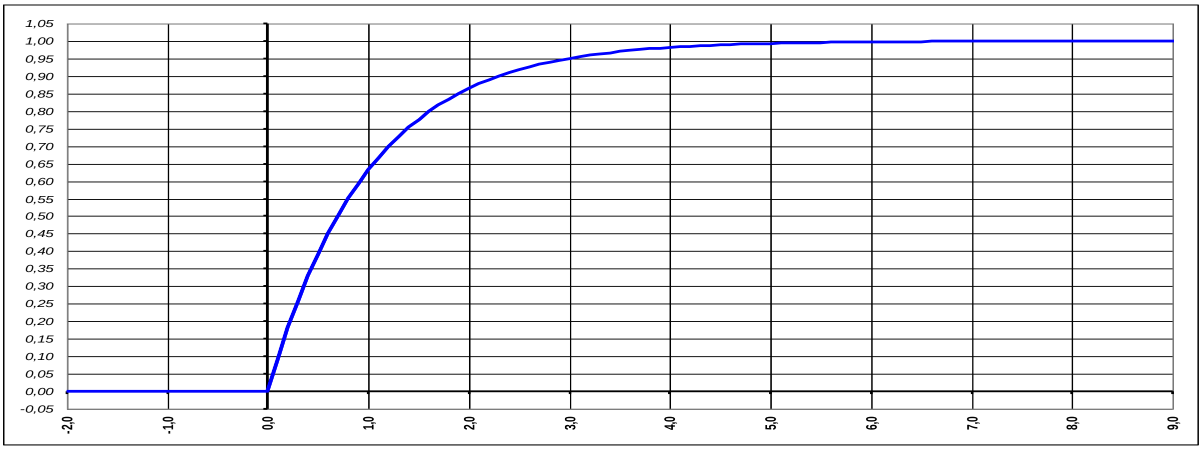
Náhodná proměnná („přepínaná“) popsaná touto distribuční funkcí nabývá s pravděpodobností 0,3 hodnoty 0, s pravděpodobností 0,35 se „rovnoměrně vyskytuje“ v intervalu $(0,7\rangle$ a s pravděpodobností 0,35 se „rovnoměrně vyskytuje“ v intervalu $\langle 15,16\rangle$.



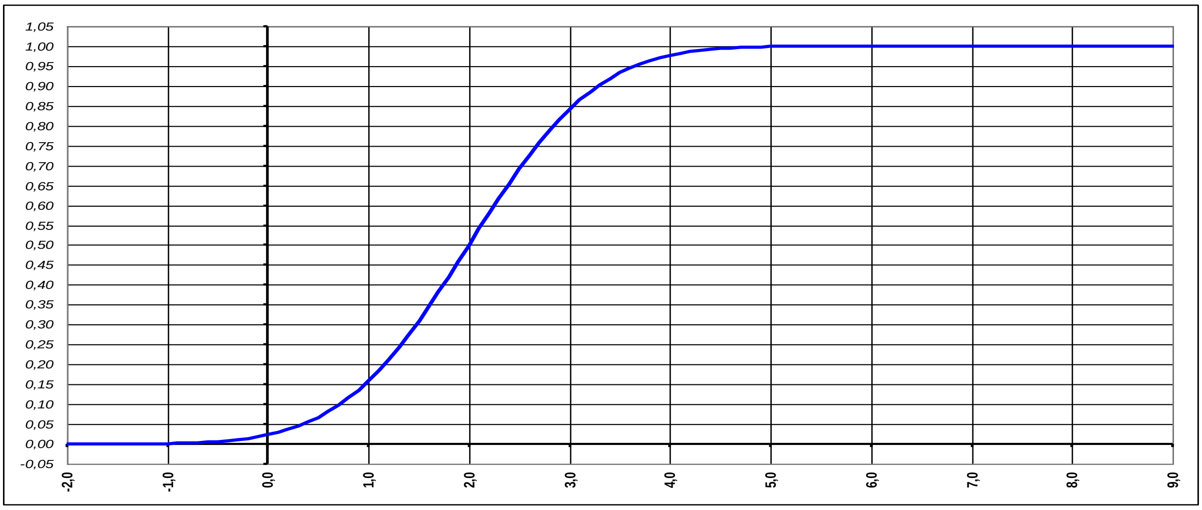
Náhodná proměnná popsaná touto distribuční funkcí nabývá s pravděpodobností 0,5 hodnoty 2, s pravděpodobností 0,5 se „exponenciálně vyskytuje“ v intervalu $(2,+\infty\rangle$.



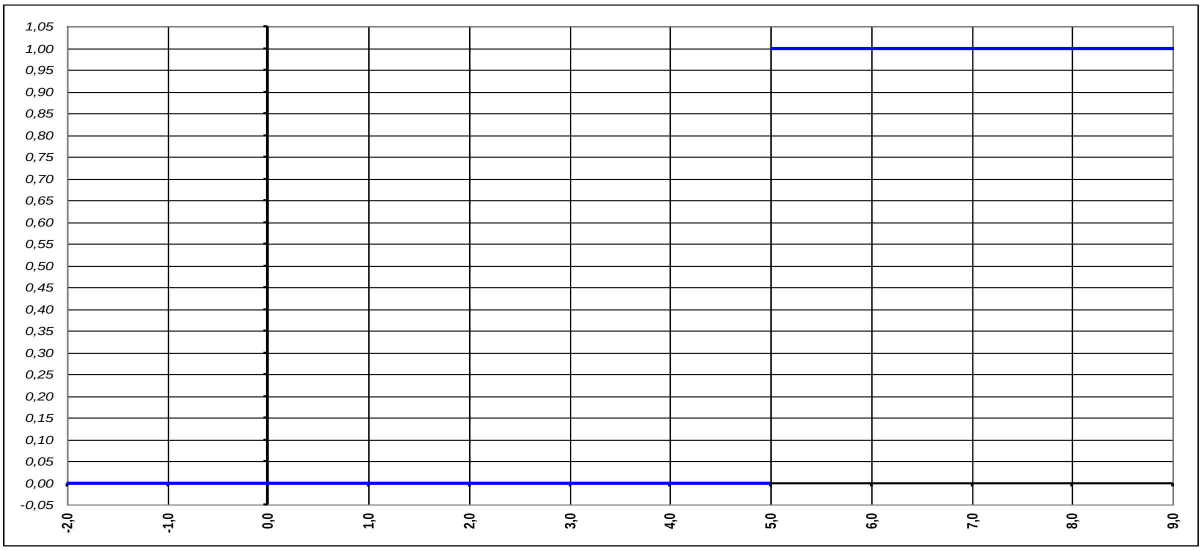
Náhodná proměnná popsaná touto distribuční funkcí nabývá s pravděpodobností 0,5 hodnoty 0, s pravděpodobností 0,5 se „exponenciálně vyskytuje“ v intervalu $(0,+\infty\rangle$.



Náhodná proměnná popsaná touto distribuční funkcí „rozdělená exponenciálně se vyskytuje“ v intervalu $(0,+\infty\rangle$.



Náhodná proměnná popsaná touto distribuční funkcí je „rozdělená gaussovsky se střední hodnotou 2 a směrodatnou odchylkou 1“ v intervalu $(-\infty,+\infty)$.



„Degenerovaná“ náhodná proměnná popsaná touto distribuční funkcí nabývá s jistotou hodnotu 5.

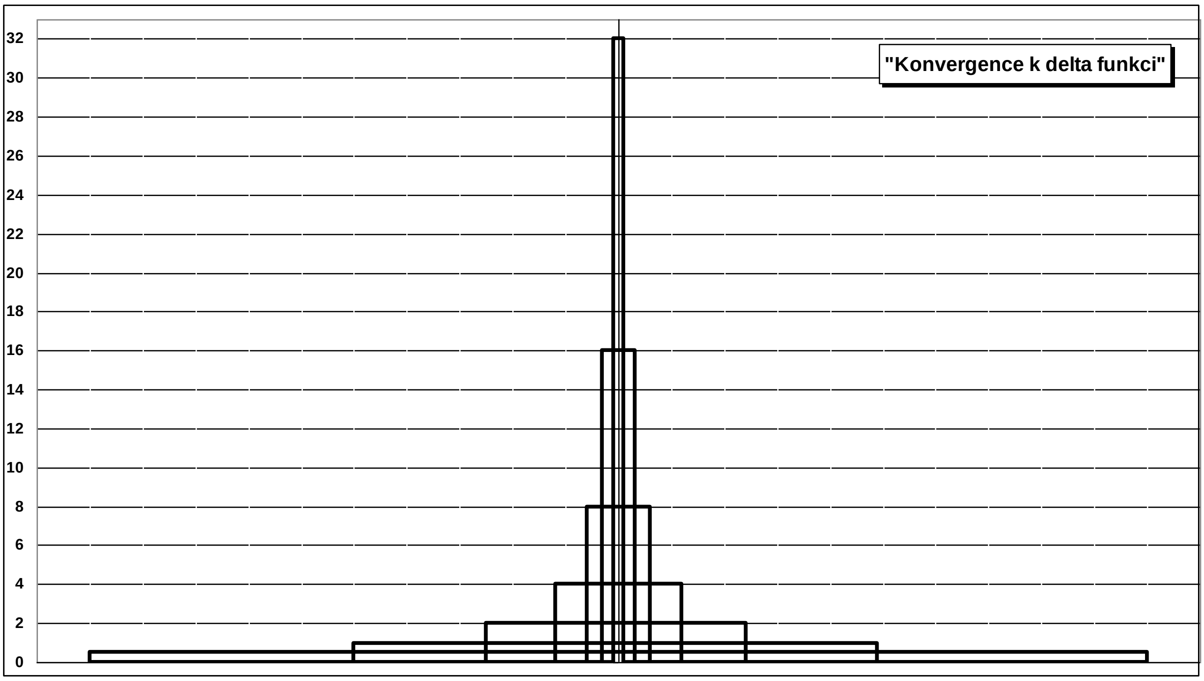
Náměty pro náročné: Jak by vypadala distribuční funkce „rovnoměrného“ rozdělení definovaného jen na racionálních číslech intervalu $\langle 0,1 \rangle$? Jak by vypadala distribuční funkce „rovnoměrného“ rozdělení definovaného jen na doplňku racionálních čísel do intervalu $\langle 0,1 \rangle$? Jak by vypadala distribuční funkce „rovnoměrného“ rozdělení definovaného jen na transcendentních číslech z intervalu $\langle 0,1 \rangle$?

Hustota spojité „jednorozměrné“ náhodné proměnné

Pod hustotou náhodné proměnné ξ budeme rozumět $f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x) = \frac{d}{dx}P(\xi < x)$ a to v bodech kde taková derivace existuje. V bodech „skoků = konečných nespojitostí“ distribuční funkce (tj. tam kde s nenulovou pravděpodobností náhodná proměnná nabývá konkrétní a jedné hodnoty) se v klasické pravděpodobnostní teorii často dodefinovává pomocí aparátu „$\delta -$funkce“ = „$\delta -$impulsu“. Ta (ten) je zaveden následovně:

$\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ a $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1$ (Diracova delta funkce). Je zřejmé, že těmito vztahy není zavedena funkce v klasickém smyslu (někdy se takovým objektům říká distribuce, tento pojem nebude používán pro snadnou záměnu s distribuční funkcí. $\delta -$funkci lze získat jako limitu následující posloupnosti funkcí:

$f_n(x) = 2^{n-1} \Leftrightarrow x \in \left\langle -2^{-n}, +2^{-n} \right\rangle$ jinak $f_n(x) = 0;\ \ n = 0,1,2,....$

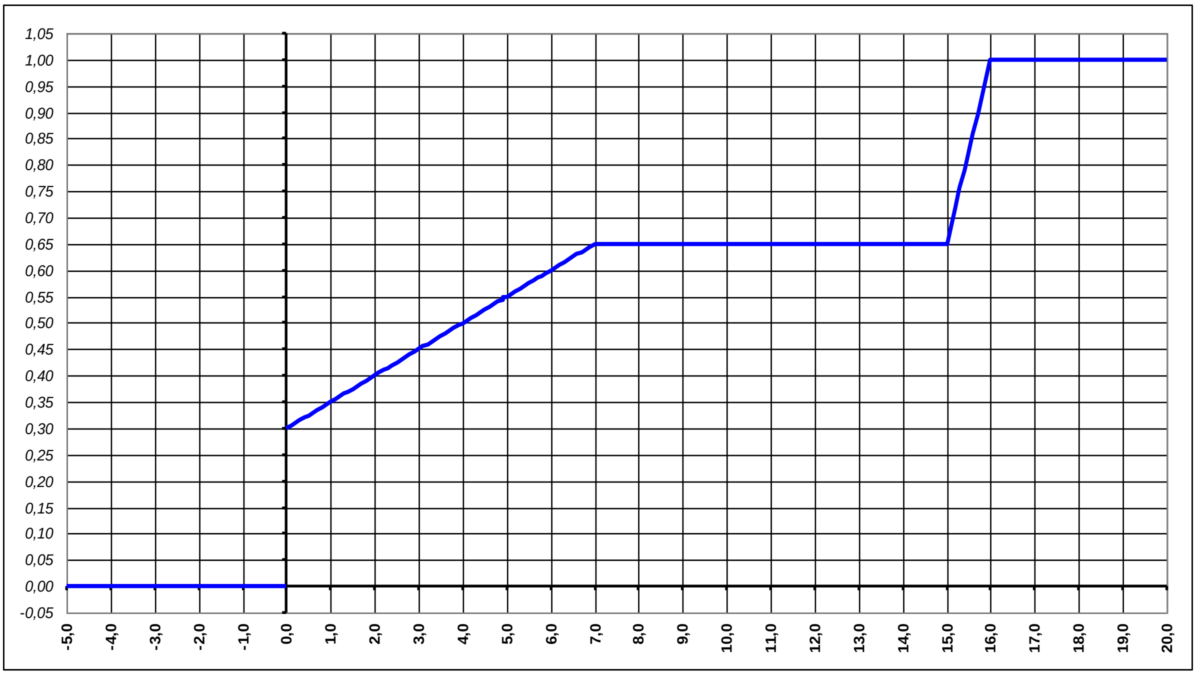


Je zřejmé, že $i_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1; n = 0,1,2,...$ a že, $\lim_{n\to+\infty} i_n = 1$ také, že $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \delta(x)$ ale ta není funkcí, neboť má v 0 nevlastní hodnotu.

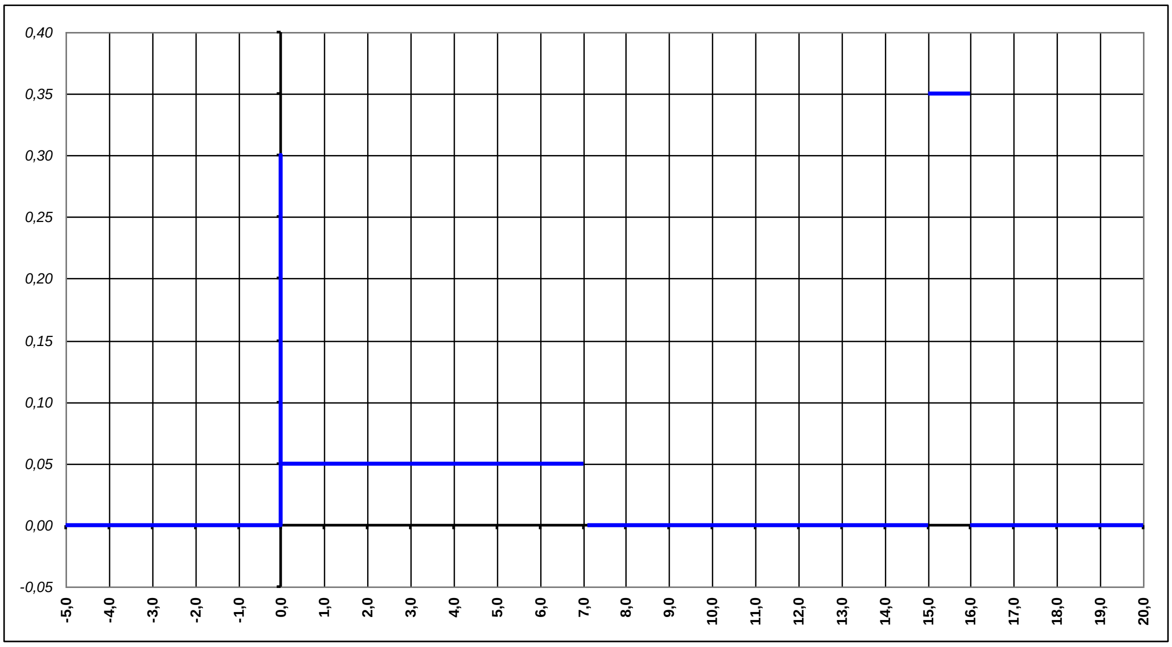
Počítání s $\delta(x)$:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a); \forall f(x)$ funkce nad $R_1 \Rightarrow$ alternativní název pro $\delta(x)$: vzorkovací funkce. Dokažte.
2. $\int_{-\infty}^{x} \delta(s-a)ds = h(x-a),$ kde $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0; h(x) = 1 \Leftrightarrow x > 0$, funkce $h(x)$ bývá nazývána jednotkovým skokem nebo také distribuční funkcí degenerované náhodné proměnné nabývající s jistotou hodnotu 0.
3. $\int_{-\infty}^{y} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \Leftrightarrow y \geq a;\quad \int_{-\infty}^{y} f(x)\delta(x-a)dx = 0 \Leftrightarrow y < a$

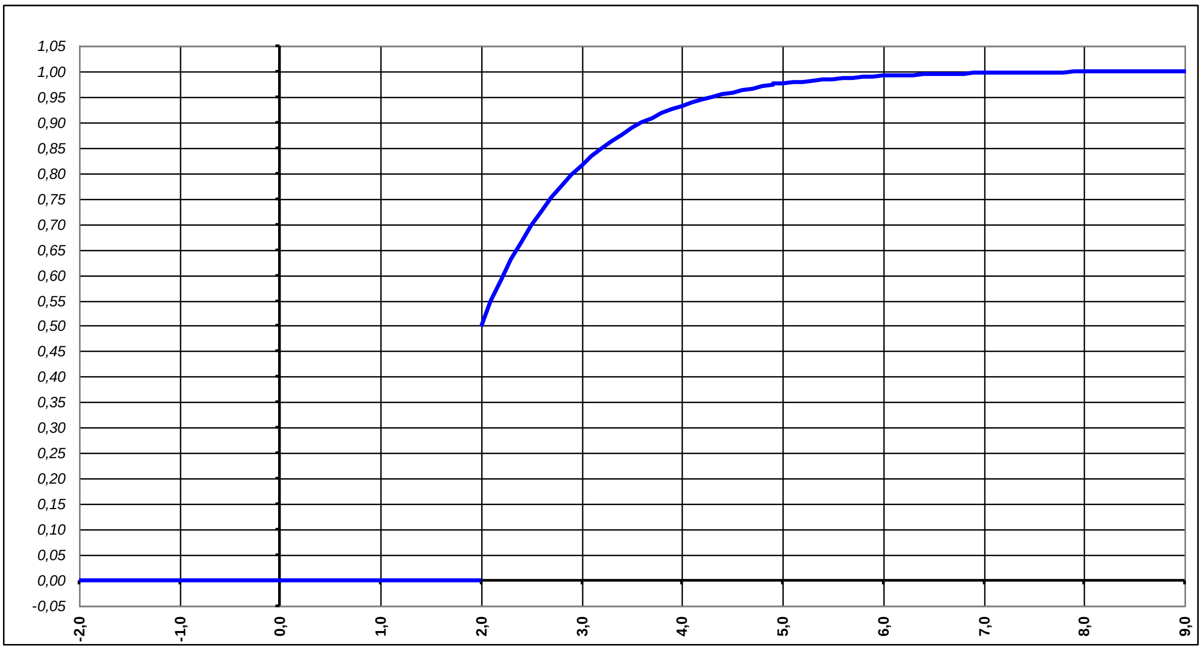
Příklady:



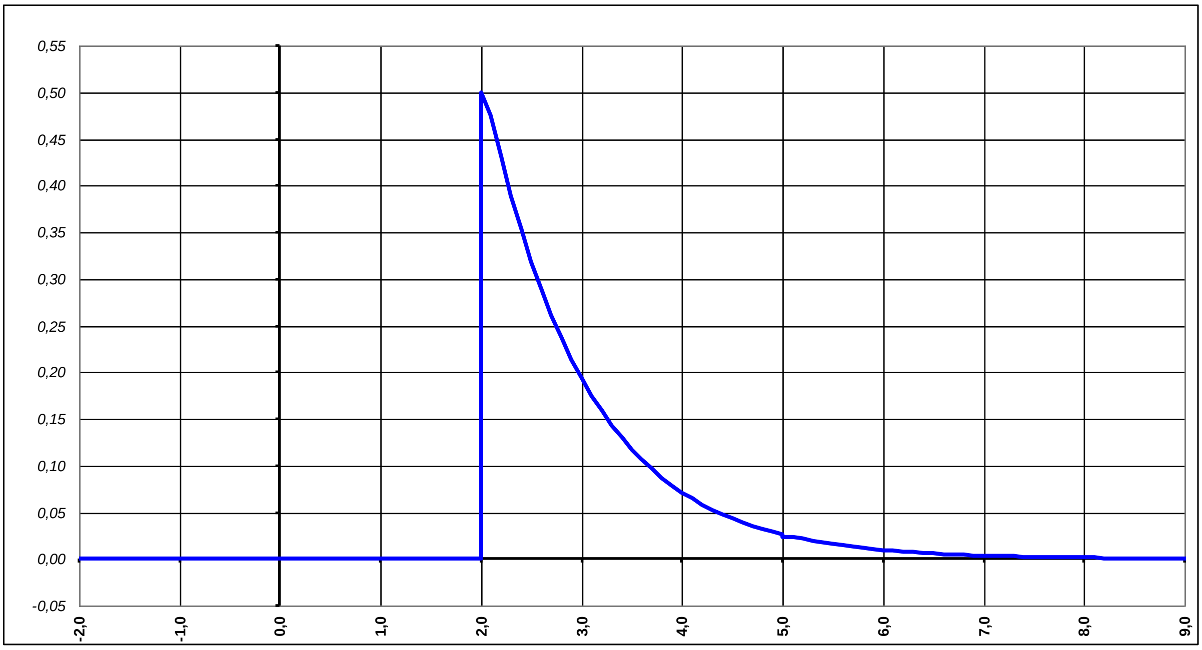
Distribuční funkce



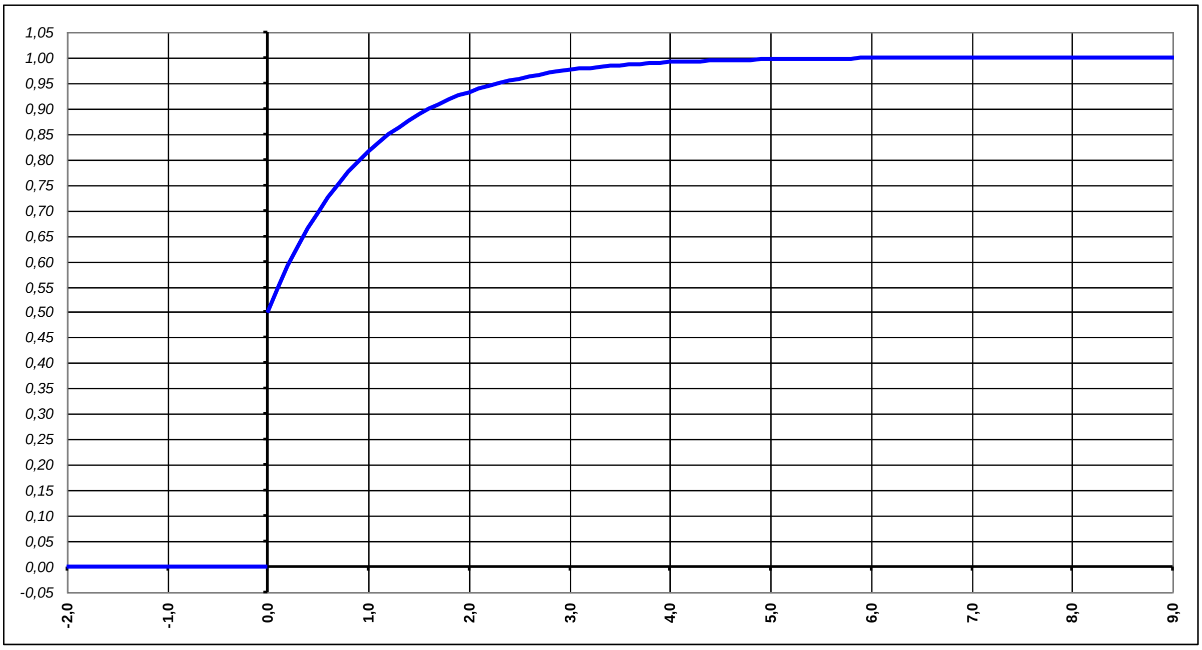
a její hustota.



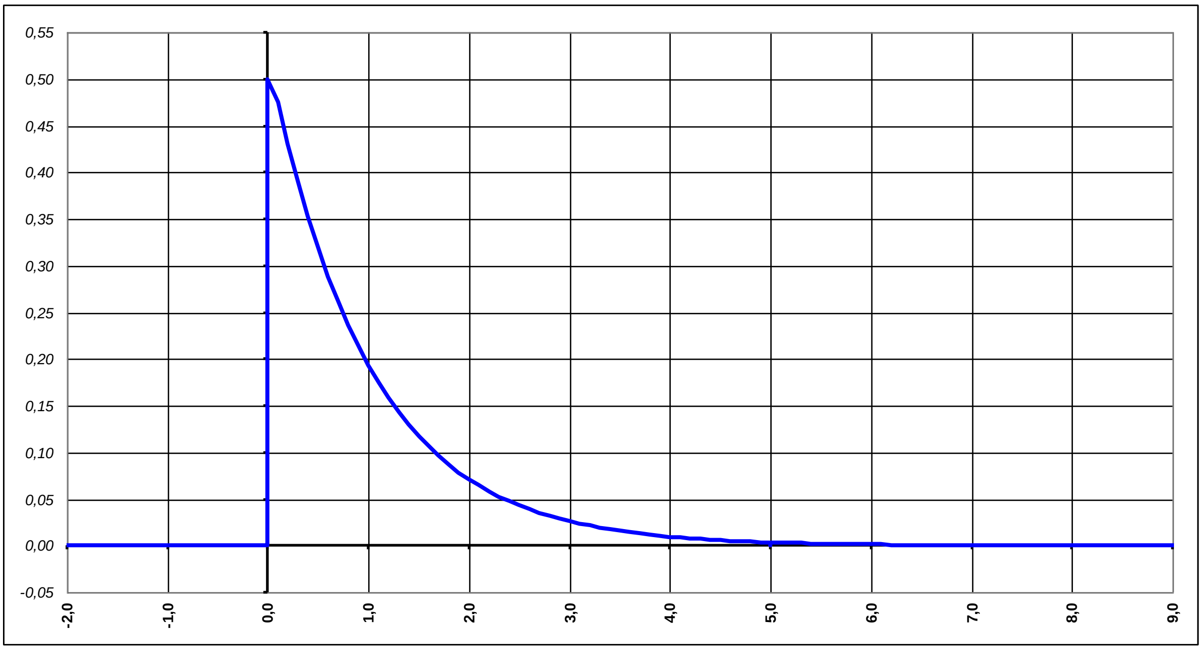
Distribuční funkce



a její hustota.



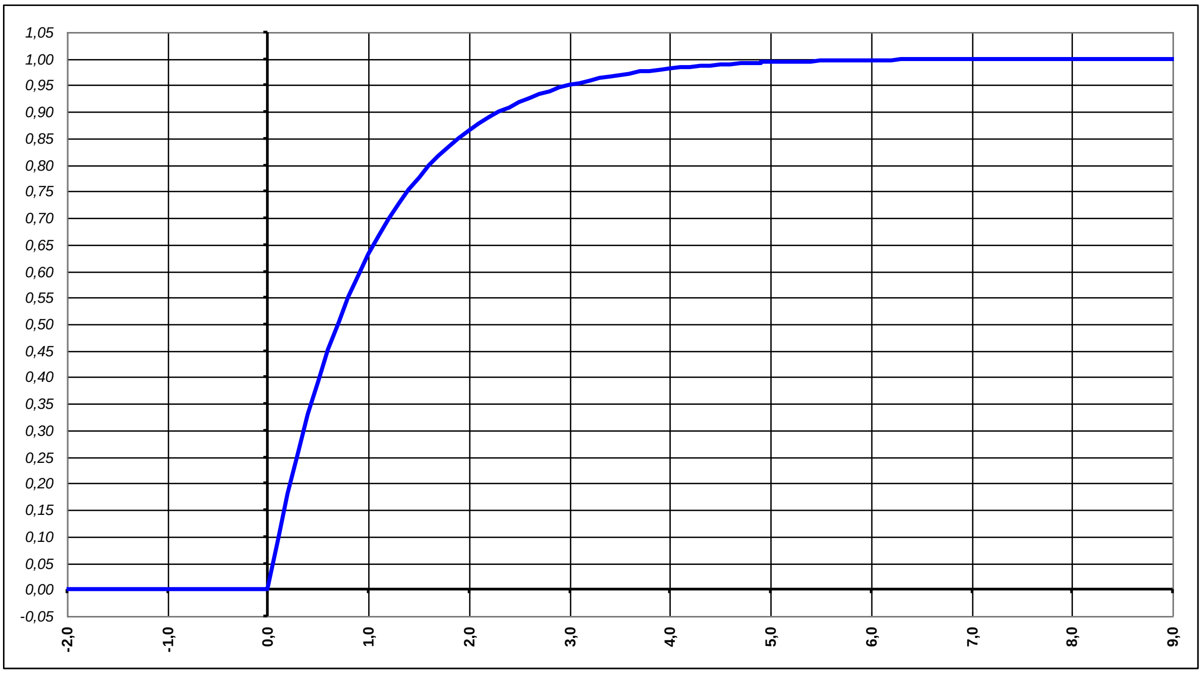
Distribuční funkce



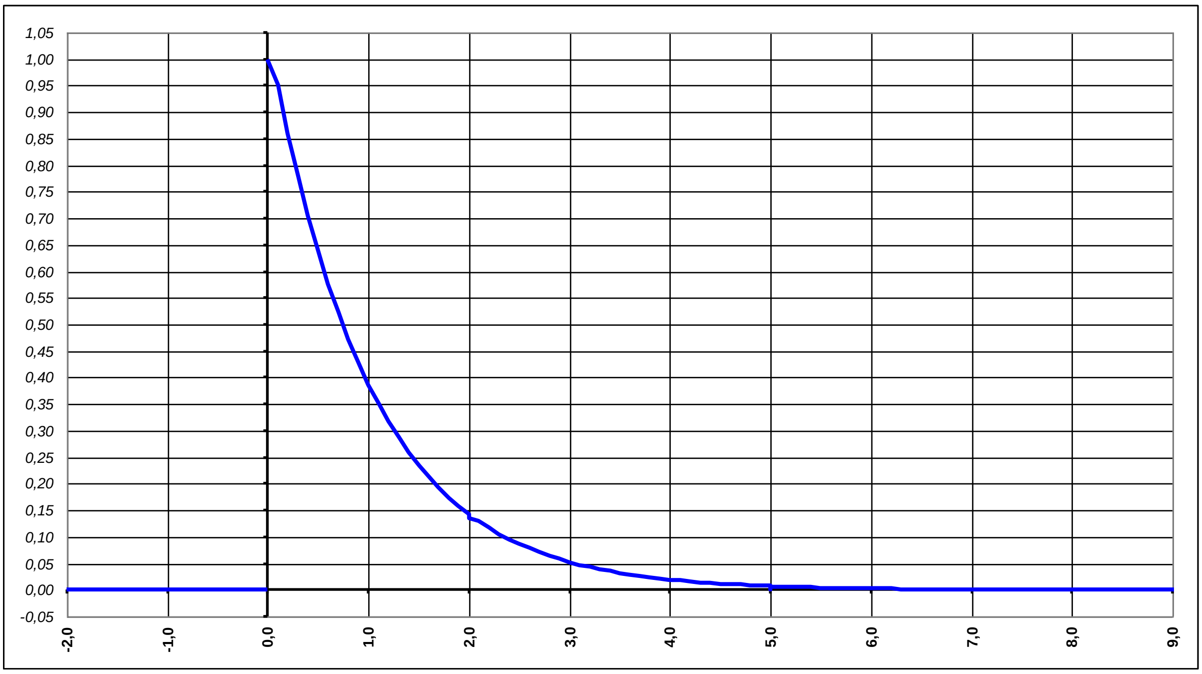
a její hustota, kterou je možné modelovat pomocí výše uvedeného formalismu

$$f(x) = 0{,}5\delta(x) + 0{,}5e^{-x} \Leftrightarrow x \geq 0;\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x < 0$$

a odpovídající distribuční funkce $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{0}^{x} f(s)ds = \begin{matrix} 0{,}5 + 0{,}5(1 - e^{-x}) \Leftrightarrow x \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow x < 0 \end{matrix}$

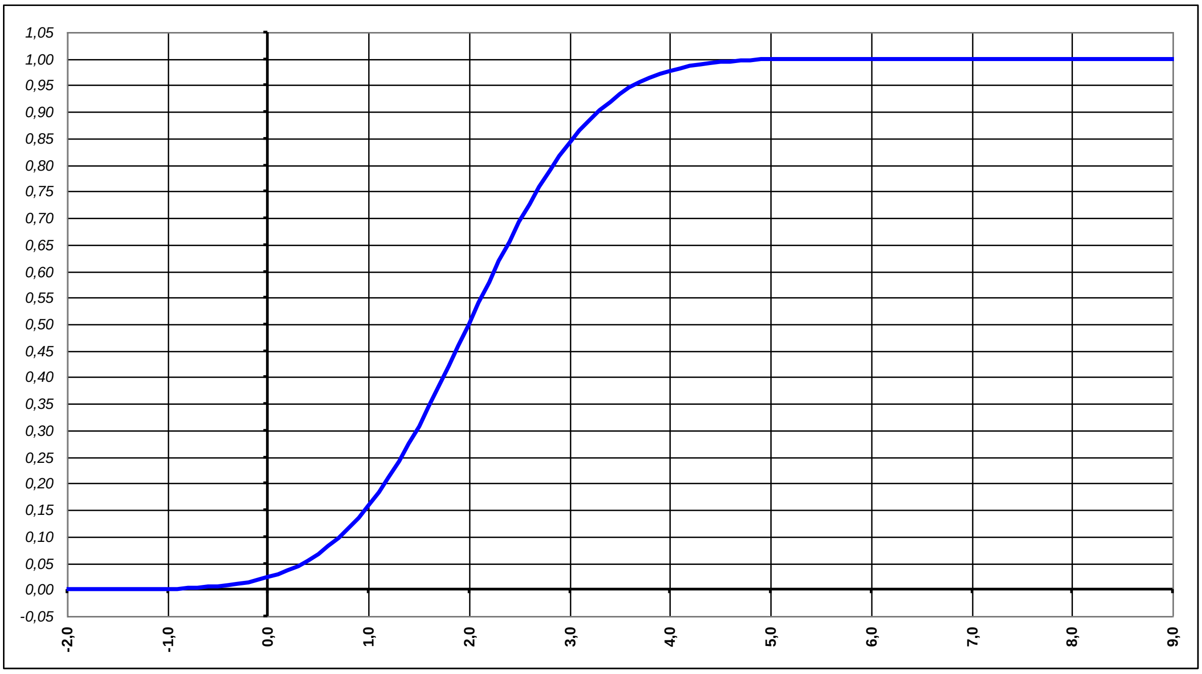


Distribuční funkce

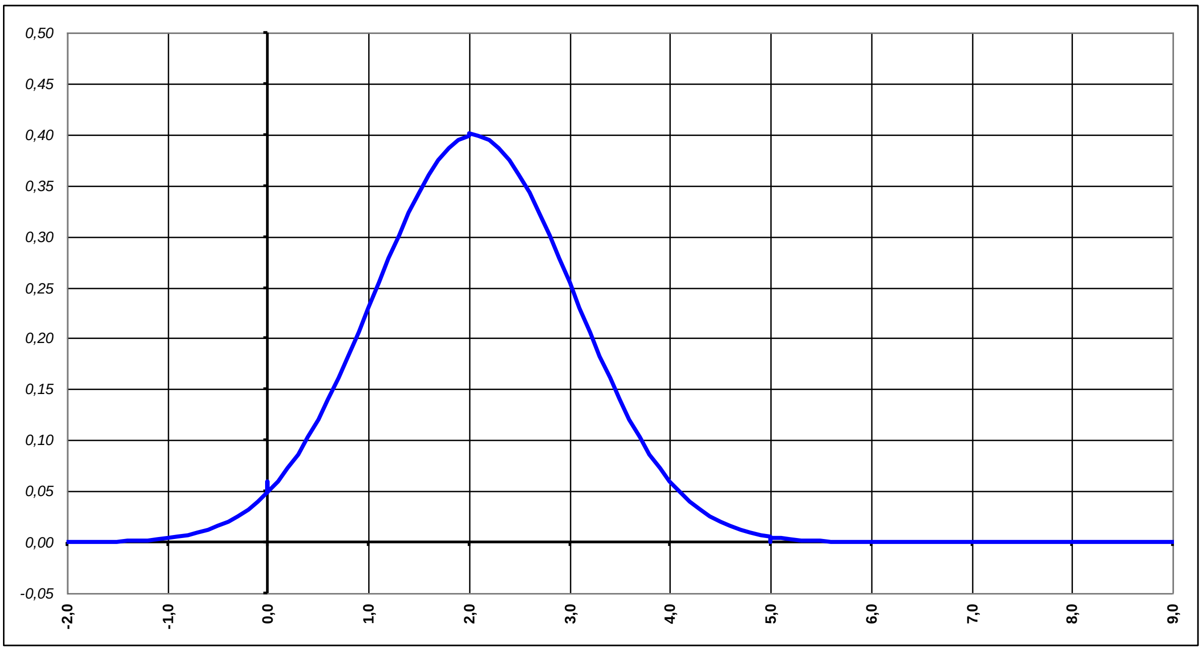


a její hustota, kterou je možné modelovat pomocí výše uvedeného formalismu $f(x)=e^{-x} \Leftrightarrow x \geq 0; f(x)=0 \Leftrightarrow x<0$ a odpovídající distribuční funkce

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds=\int_{0}^{x} f(s)ds=\begin{matrix}(1-e^{-x}) \Leftrightarrow x \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad \Leftrightarrow x<0\end{matrix}.$$



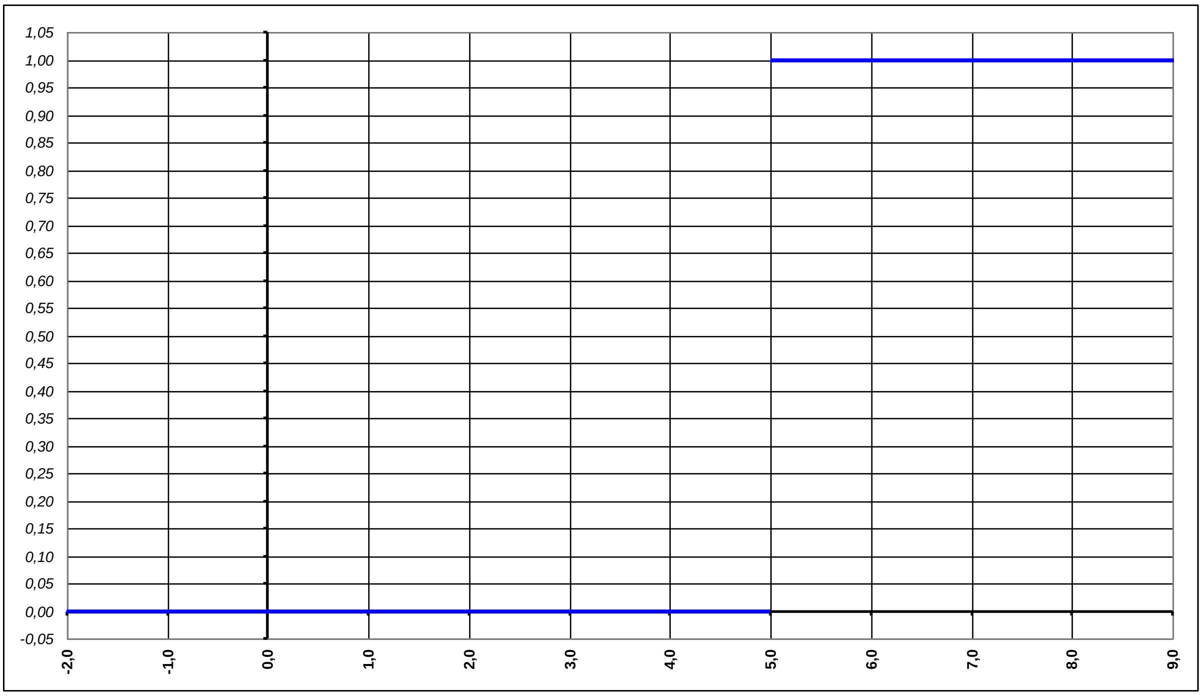
Distribuční funkce



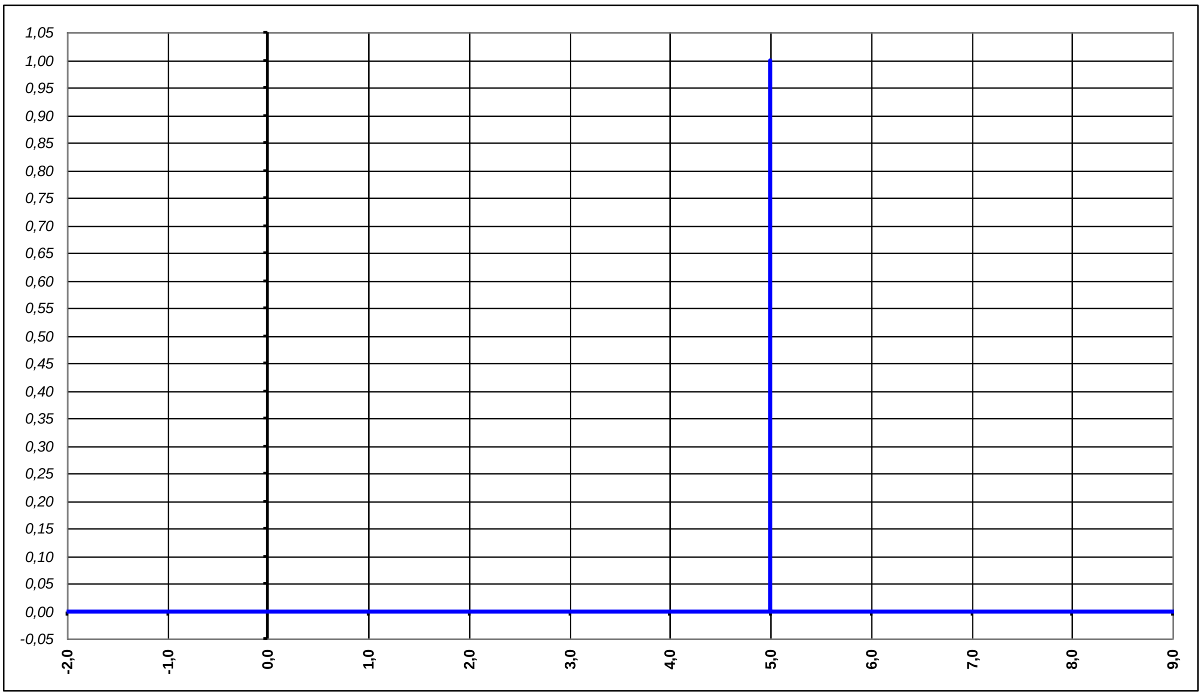
a její hustota.

Pro gaussovská rozdělení platí a je používán následující formalismus: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ a

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$. Používají se i jiné varianty!



Distribuční funkce



a její hustota, kterou je možné modelovat pomocí výše uvedeného formalismu $f(x)=\delta(x-5)$ a odpovídající distribuční funkce $F(x)=h(x-5)$.

Rozdělení součtu, součinu a podílu nezávislých náhodných veličin

$$P\{x+y<z\}=\iint_{x+y<z} f(x)g(y)dxdy \quad \text{a} \quad h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx$$

$$P\{xy<z\}=\iint_{xy<z} f(x)g(y)dxdy \quad \text{a} \quad h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(\frac{z}{y})\frac{1}{|y|}dy$$

$$P\{x/y<z\}=\iint_{x/y<z} f(x)g(y)dxdy \quad \text{a} \quad h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y|g(y)f(zy)dy$$

Blíže viz: Rényi A.: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str.187-188.

Odvození vztahu: $P\{x/y<z\}=\iint_{x/y<z} f(x)g(y)dxdy \quad \text{a} \quad h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y|g(y)f(zy)dy$

$$P\{x/y<z\}=\iint_{x/y<z} f(x)g(y)dxdy=\begin{matrix}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x)g(y)dydx \Leftrightarrow y>0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{yz}^{+\infty} f(x)g(y)dydx \Leftrightarrow y<0\end{matrix},$$

$$\frac{d}{dz}P\{x/y<z\}=\begin{matrix} y>0 \Rightarrow \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x)g(y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{yz} f(x)g(y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(yz)g(y)dy \\ y<0 \Rightarrow \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{yz}^{+\infty} f(x)g(y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dz}\int_{yz}^{+\infty} f(x)g(y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} -yf(yz)g(y)dy \end{matrix}=$$

$$f(z)=\frac{d}{dz}P\{x/y<z\}=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz)g(y)dy$$

Námět: Odvoďte ostatní vztahy.

Rozdělení funkce náhodné veličiny

Buď ξ náhodná veličina definovaná na R_1 (popsaná hustotou $f_\xi(x)$ a distribuční funkcí $F_\xi(x)$, dále buď ryze monotónní a spojitá funkce $g(x)$ a to na oblasti ve které je $f_\xi(x)>0$, která má derivaci až na spočetný počet bodů. Buď $\eta=g(\xi)$ transformace náhodné veličiny ξ. Potom za uvedených podmínek a na uvedené oblasti existuje k funkci $\eta=g(\xi)$ její inverze $g^{-1}(\eta)=\xi$. Pro náhodnou proměnnou $\eta=g(\xi)$ platí:

1. $g(x)$ je rostoucí.

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=F_\eta(x)=P(g(\xi)<x)=P(\xi<g^{-1}(x))=F_\xi(g^{-1}(x))$$

$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}F_\eta(x)=f_\xi(g^{-1}(x))\frac{d}{dx}g^{-1}(x)=\frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{\frac{d}{dx}g(x)}.$$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(g(\xi) < x) = P(\xi > g^{-1}(x)) =$$

2. $g(x)$ je klesající. $= 1 - P(\xi < g^{-1}(x)) = 1 - F_\xi(g^{-1}(x))$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = -f_\xi(g^{-1}(x)) \frac{d}{dx} g^{-1}(x) = \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{-\frac{d}{dx} g(x)}$$

Shrnuto: $F_\eta(x) = \begin{matrix} g(x) \text{ je klesající} \Rightarrow 1 - F_\xi(g^{-1}(x)) \\ g(x) \text{ je rostoucí} \Rightarrow \quad F_\xi(g^{-1}(x)) \end{matrix} \qquad f_\eta(x) = \dfrac{f_\xi(g^{-1}(x))}{\left|\frac{d}{dx} g(x)\right|}$.

Triviální transformace

$$\eta = \xi + a \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi + a < x) = P(\xi < x - a) = F_\xi(x - a)$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x - a) = f_\xi(x - a) \quad ,$$

$$\eta = k\xi; k > 0 \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(k\xi < x) = P\left(\xi < {}^{x}\!/_{k}\right) = F_\xi\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\xi\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k} f_\xi\left(\frac{x}{k}\right) \quad ,$$

$$\eta = -\xi \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(-\xi < x) = P(\xi > -x) = 1 - P(\xi < -x) = 1 - F_\xi(-x)$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - F_\xi(-x)\right) = f_\xi(-x) \quad ,$$

$$\eta = |\xi| \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(|\xi| < x) = P(-x < \xi < x) = P(\xi < x) - P(\xi < -x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x)$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(F_\xi(x) - F_\xi(-x)\right) = f_\xi(-x) + f_\xi(x) \quad ,$$

$$\eta = \xi^2 \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_\xi(\sqrt{x}) + f_\xi(-\sqrt{x})\right) \quad ,$$

$$\eta = \frac{1}{\xi}; \xi \neq 0 \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{1}{\xi} < x\right) = P\left(\frac{1}{\xi} < x; \xi > 0\right) + P\left(\frac{1}{\xi} < x; \xi < 0\right) =$$

$$= P(1 < x\xi; \xi > 0) + P(1 > x\xi; \xi < 0) =$$

kde $\chi(*)$ je charakteristická (množinová) funkce výrazu *, tj. pokud je výraz v závorce pravdivý, je charakteristická funkce rovna jedné, pokud je nepravdivý, je rovna nule.

$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}F_\eta(x)=\frac{d}{dx}F_\eta(x)=\frac{d}{dx}\left(\left(1-F_\xi\left(\frac{1}{x}\right)\right)\chi(x>0)+F_\xi\left(\frac{1}{x}\right)\chi(x<0)\right)=$$
$$=\frac{1}{x^2}f_\xi\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow((\xi\neq 0)\wedge(x\neq 0))$$
$$\eta=e^\xi\Rightarrow F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(e^\xi<x)=P(\xi<lg(x))=F_\xi(lg(x))\Leftrightarrow x>0;F_\eta(x)=0\Leftrightarrow x\leq 0$$
$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}(F_\xi(lg(x)))=\frac{1}{x}f_\xi(lg(x))\Leftrightarrow x>0;\ f_\eta(x)=0\Leftrightarrow x\leq 0 .$$

Triviální transformace – kladné náhodné proměnné

$$\eta=lg(\xi);\xi>0\Rightarrow F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(lg(\xi)<x)=P(\xi<e^x)=F_\xi(e^x)$$
$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}(F_\xi(e^x))=e^x f_\xi(e^x) ,$$

$$\eta=\frac{\xi}{1+\xi};\xi>0\Rightarrow F_\eta(x)=P(\eta<x)=P\left(\xi<\frac{x}{1-x}\right)=F_\xi\left(\frac{x}{1-x}\right);0\leq x<1$$
$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}\left(F_\xi\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)=\frac{1}{(1-x)^2}f_\xi\left(\frac{x}{1-x}\right) .$$

Charakteristické funkce

Mějme náhodnou proměnnou ξ s její distribuční funkcí $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ a hustotou

$f_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x)$.

Pod charakteristickou funkcí takového rozdělení budeme rozumět:

$C_\xi(j\omega)=E\{e^{j\omega\xi}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega s}f_\xi(s)ds,\quad j=\sqrt{-1}$. Charakteristická funkce je tedy vlastně Fourierovou transformací hustoty dané náhodné proměnné.

Charakteristická funkce součtu nezávislých náhodných proměnných:

$$C_{\xi_1+\xi_2}(j\omega)=E\{e^{j\omega(\xi_1+\xi_2)}\}=E\{e^{j\omega\xi_1}e^{j\omega\xi_2}\}=E\{e^{j\omega\xi_1}\}E\{e^{j\omega\xi_2}\}=C_{\xi_1}(j\omega)C_{\xi_2}(j\omega)$$

$\Rightarrow$ Charakteristická funkce součtu nezávislých náhodných proměnných je rovna jejich součinu.

Charakteristická funkce „lineární“ transformace náhodné proměnné:

$$C_{a\xi_1+b}(j\omega)=E\{e^{j\omega(a\xi_1+b)}\}=E\{e^{j\omega a\xi_1}e^{j\omega b}\}=e^{j\omega b}E\{e^{ja\omega\xi_1}\}=e^{j\omega b}C_{\xi_1}(ja\omega)$$

Charakteristická funkce a momenty, pokud existují:

$$\frac{d}{d\omega}C_\xi(j\omega)=\frac{d}{d\omega}E\{e^{j\omega\xi}\}=E\left\{\frac{d}{d\omega}e^{j\omega\xi}\right\}=E\{j\xi\, e^{j\omega\xi}\},\ \ldots.$$
$$\frac{d^k}{d\omega^k}C_\xi(j\omega)=E\{(j\xi)^k e^{j\omega\xi}\}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^k}{d\omega^k}C_\xi(j\omega)\Big|_{\omega=0}=E\{(j\xi)^k e^{j0\xi}\}=(j)^k E\{\xi^k\}=(j)^k m_k(\xi)$$

Shrnuto: $\frac{d^k}{d\omega^k} C_\xi(j\omega)\Big|_{\omega=0} = (j)^k m_k(\xi)$

Rozdělení	Hustota $f_\xi(x)$	Charakteristická funkce $C_\xi(j\omega)$
Normální centrované a normalizované	$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$C_\xi(j\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
Normální obecné	$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$C_\xi(j\omega)=e^{j\omega\mu-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$
Exponenciální rozdělení	$f_\xi(x)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}}$	$C_\xi(j\omega)=\frac{1}{1-j\omega\tau}$
Gama rozdělení řádu k (jedná se o součet k shodných nezávislých exponenciálně rozdělených náhodných proměnných z předchozího řádku)	$f_\xi(x)=\frac{x^{k-1}e^{-\frac{x}{\tau}}}{\tau^{k}(k-1)!}$	$C_\xi(j\omega)=\frac{1}{(1-j\omega\tau)^k}$
Rozdělení kvadrátu náhodné proměnné s normálním centrovaným a normalizovaným rozdělením.	$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\Leftrightarrow x>0$ $=0\Leftrightarrow x\le 0$	$C_\xi(j\omega)=\frac{1}{(1-2j\omega)^{\frac{1}{2}}}$
Rozdělení součtu k nezávislých kvadrátů stejně rozdělených náhodných proměnných s normálním centrovaným a normalizovaným rozdělením (χ^2 s k stupni volnosti).	$f_\xi(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k/2-1}e^{-\frac{x}{2}}\Leftrightarrow x>0$ $=0\Leftrightarrow x\le 0$	$C_\xi(j\omega)=\frac{1}{(1-2j\omega)^{\frac{k}{2}}}$
Rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -1,1\rangle$	$f_\xi(x)=1/2\Leftrightarrow -1\le x\le 1$ $=0$ jinak	$\frac{sin(\omega)}{\omega}$
Rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0,1\rangle$, získá se z předchozího transformací $\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}$.	$f_\xi(x)=1\Leftrightarrow 0\le x\le 1$ $=0$ jinak	$e^{\frac{j\omega}{2}}\frac{2sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$
Součet k stejně rozdělených a nezávislých náhodných proměnných rovnoměrně rozdělených na intervalu $\langle -1,1\rangle$		$\left(\frac{sin(\omega)}{\omega}\right)^k$

Převzato a modifikováno z: Rényi A.: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str.262-271.

Základní parametry spojitých (nejen) rozdělení

Charakteristiky polohy

Střední hodnota: $E\{\xi\}=\int_{-\infty}^{+\infty}sf_\xi(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}sdF_\xi(s)$, pokud existuje. Př.(neexistence):

$F_\xi(x)=1-\frac{m}{x}\Leftrightarrow x\ge m>0; F_\xi(x)=0\Leftrightarrow x<m\quad f_\xi(x)=\frac{m}{x^2}\Leftrightarrow x\ge m>0; f_\xi(x)=0\Leftrightarrow x<m$.

Medián: je řešením rovnice $F(x_{med}) = \frac{1}{2}$, pokud existuje. **Námět:** nalezněte rozdělení pro které medián v tomto pojetí neexistuje a rozdělení, které má v tomto pojetí „více“ mediánů. Někdy bývá medián definován soustavou nerovností $P(\xi \le x_{med}) \ge 1/2; P(\xi \ge x_{med}) \ge 1/2$.

Kvantil: p-kvantilem budeme rozumět řešení x_p rovnice: $F_\xi(x_p) = p$. V tomto smyslu je medián 0,5 kvantilem. Někdy bývá p-kvantil také zaveden soustavou nerovností jako u mediánu: $P(\xi \le x_p) \ge p; P(\xi \ge x_p) \ge 1-p$. **Námět:** porovnejte obě definice (zajímavé pro diskrétní náhodné proměnné).

Námět: pro $a\xi + b$ platí $E\{a\xi + b\} = aE\{\xi\} + b$, pokud pravá a levá strana rovnice existují (námět: nestačí existence jedné strany?). Bude toto platit pro medián (pokud ano, za jakých podmínek)? Bude toto platit pro p-kvantil (pokud ano, za jakých podmínek)?

Námět: Nalezněte střední hodnotu náhodných proměnných $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 - \xi_2$. Nalezněte střední hodnotu náhodné proměnné $\xi_1\xi_2$, pokud jsou obě náhodné proměnné ξ_1, ξ_2 nezávislé.

Charakteristiky variability

Rozptyl (variance): $\sigma^2(\xi) = E\{(\xi - E\{\xi\})^2\}$, opět pokud existuje. **Námět:** jak bude vypadat rozptyl náhodné proměnné $a\xi + b$, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 - \xi_2$ kde ξ_1, ξ_2 jsou nezávislé náhodné proměnné. **Námět:** nalezněte a, které minimalizuje výraz: $E\{(\xi - a)^2\}$.

Směrodatná odchylka: $\sigma(\xi) = +\sqrt{\sigma^2(\xi)}$.

Námět: nalezněte střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné $u = \dfrac{\xi - E\{\xi\}}{\sigma(\xi)}$.

Momenty

Obecné: $m_k(\xi) = E\xi^k$.

Centrální: $\mu_k(\xi) = E\{(\xi - E\{\xi\})^k\}$.

Momentové charakteristiky

Šikmost (skewness): $s_3(\xi) = \dfrac{\mu_3(\xi)}{(\sigma(\xi))^3}$, pro „symetrická rozdělení“ je nulová, pro rozdělení s „nakupením hodnot vlevo od středu“ je kladná, pro rozdělení s „nakupením hodnot vpravo od středu“ je záporná.

Špičatost (excess, kurtosis): $s_4(\xi) = \dfrac{\mu_4(\xi)}{(\sigma(\xi))^4}$ **nebo** $s_4^*(\xi) = \dfrac{\mu_4(\xi)}{(\sigma(\xi))^4} - 3$. Špičatost $s_4^*(\xi)$ je pro normální rozdělení pravděpodobnosti rovna nule. Pokud je rozdělení „špičatější“ než normální je kladná, pokud „méně špičatějši = plošší“ než normální je záporná.

Jiné charakteristiky variability

Kvartilové rozpětí: je rozdílem 0,75kvantilu a 0,25kvantilu $q(\xi) = x_{0,75} - x_{0,25}$. Je zřejmé, že $P(x_{0,25} < \xi < x_{0,75}) = 1/2$. **Námět:** Nalezněte nejmenší δ takové, že platí $P(x_{0,5} - \delta < \xi < x_{0,5} + \delta) = 1/2$, upřesněte podmínky takového řešení. Nalezněte nejkratší interval $\langle d, h \rangle$ takový, že platí $P(d < \xi < h) = 1/2$, upřesněte (zde také) podmínky takového řešení.

Veličina $d(\xi) = E\{|\xi - E\{\xi\}|\}$ (absolutní odchylka). **Námět:** Nalezněte $d(\xi)$ pro normální rozdělení s hustotou $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ a pokuste se nalézt souvislost takové charakteristiky se směrodatnou odchylkou (Rényi A.: Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972, str.204-206).

Námět: Pokuste se studovat vlastnosti veličiny $d_{med}(\xi) = E\{|\xi - x_{med}|\}$.

Přehled některých spojitých rozdělení

Rozdělení	Distribuce	Hustota	Střední hodnota	Rozptyl
Rovnoměrné na intervalu $\langle 0,1 \rangle$	$F_\xi(x) = x; 0 \le x \le 1$	$f_\xi(x) = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
Normální – Gaussovo	$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds$	$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Exponenciální	$F_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{x-A}{\tau}}; x \ge A > 0$	$f_\xi(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x-A}{\tau}}$	$A + \tau$	τ^2
Gama rozdělení	$F_\xi(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(m)\tau^m} e^{-\frac{s}{\tau}} s^{m-1} ds; x > 0$	$f_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\tau^m} e^{-\frac{x}{\tau}} x^{m-1}$	$m\tau$	$m\tau^2$
Beta rozdělení	$F_\xi(x) = \int_0^x \frac{1}{B(p,q)} s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds;$ $0 < x < 1; p,q > 0$ $kde\ B(p,q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds$	$f_\xi(x) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
Rozdělení χ^2 s n stupni volnosti (rozdělení součtu n kvadrátů normálního, normovaného a centrovaného rozdělení	$F_\xi(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{s}{2}} s^{\frac{n}{2}-1} ds; x > 0$	$f_\xi(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$	n	$2n$

Rozdělení ***t***, Studentovo = rozdělení náhodné veličiny $\dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}}$, obě nezávislé	$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{n}B(0.5,0.5)}\left(1+\dfrac{s^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}ds$	$f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}B(0.5,0.5)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0	$\dfrac{n}{n-2}$ pro $n>2$

Doporučená a zdrojová literatura:

Jiří Reif	Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004
Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
Alfréd Rényi	Teorie pravděpodobnosti, ACADEMIA, Praha 1972
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_distribution	
Miroslav Olehla, Vladimír Věchet, Josef Olehla	***Řešení úloh matematické statistiky ve fortranu. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha 1982.***
	O složitém jednoduše aneb Nebojte se statistiky, nekouše Dostupné na: https://www.czso.cz/csu/czso/o-slozitem-jednoduse-aneb-nebojte-se-statistiky-nekouse