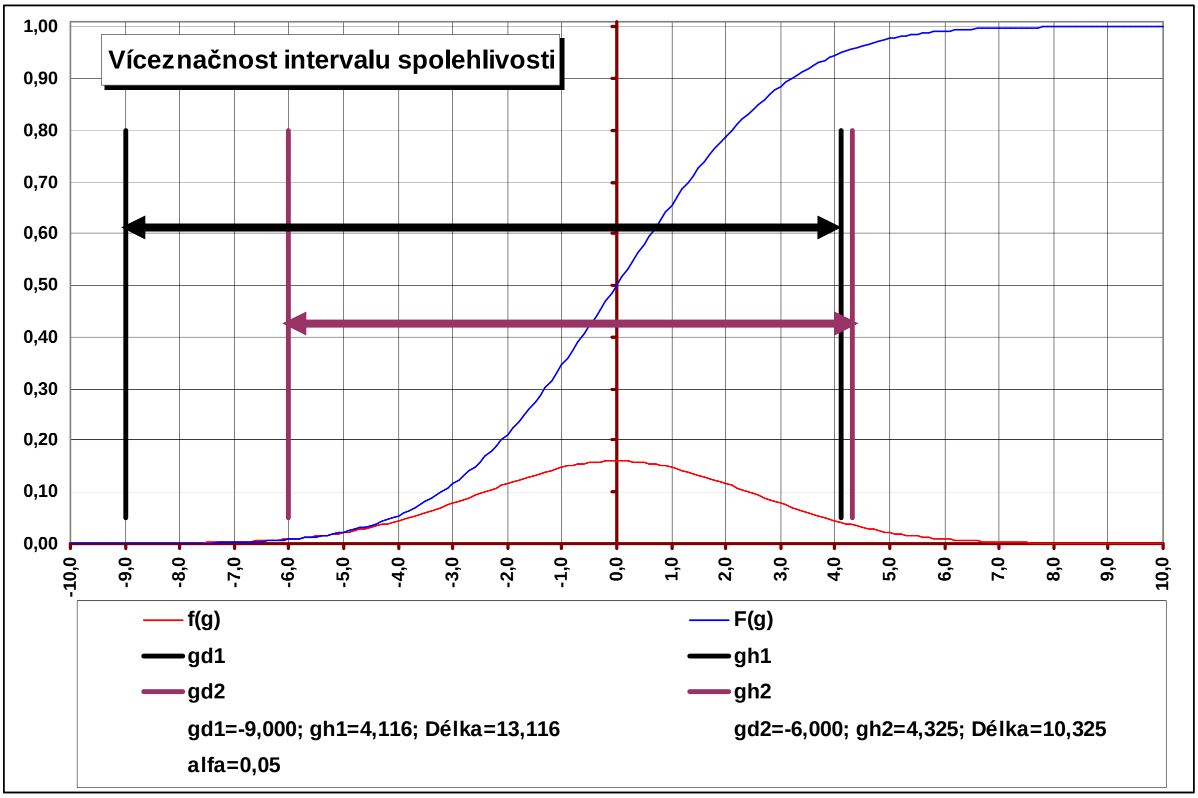
Intervalové odhady

Intervaly spolehlivosti

Mějme (iid) náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ rozsahu n náhodné proměnné ξ s hustotou $f(x; g)$, kde g je hledaný (odhadovaný) parametr. Dále předpokládáme, že je dáno číslo $1-\alpha$ nazývané koeficient spolehlivosti. Pod $100(1-\alpha)\%$ intervalem spolehlivosti pro g (Neymanovým, konfidenčním) budeme rozumět dvojici statistik $g_d(x_1, x_2, \ldots x_n) < g_h(x_1, x_2, \ldots x_n)$ takovou, že: $P(g_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g < g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geq 1-\alpha$.

Je zřejmé, že tímto vztahem nejsou obě meze $g_d(x_1, x_2, \ldots x_n), g_h(x_1, x_2, \ldots x_n)$ určeny jednoznačně a to ani za případu rovnosti $P(g_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g < g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 1-\alpha$.



Dále je vhodné si uvědomit, že při tomto pojetí jsou náhodné proměnné obě meze, nikoliv hledaný parametr. Ten je v této úloze považován za neznámou konstantu.

První metoda konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Určíme nějakou statistiku $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ odhadující parametr g.
2. Na množině $T(\mathrm{X}^n) \times G$, *kde* $T(\mathrm{X}^n)$ *je množina možných hodnot zvolené statistiky nad daným výběrovým prostorem a* G *je množina možných hodnot parametru* g, zvolíme funkci $h(T, g)$. Funkce je zvolena tak, že rozdělení jejích hodnot $h(T, g)$ nezávisí na

(neznámém) hledaném parametru g. Na volbu takové funkce je pak dáno i následující omezení: $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ existuje její inverze vůči g.

3. K dané funkci $h(T,g)$ existují čísla h_d, h_h taková, že $P(h_d < h(T,g) < h_h) = 1-\alpha$. Podotýkáme, že čísla h_d, h_h nejsou dána jednoznačně (viz výše).
4. Z existence inverze vůči g pak plyne $P\left(h^{-1}(T, h_d) < g < h^{-1}(T, h_h)\right) = 1-\alpha$ (to za předpokladu, že funkce $h(T,g)$ je při daném T rostoucí; **námět**: zformulujte totéž pro případ, že je klesající).
5. V takovém případě $g_d(x_1, x_2, ..., x_n) = h^{-1}(T(x_1, x_2, ..., x_n), h_d)$ a $g_h(x_1, x_2, ..., x_n) = h^{-1}(T(x_1, x_2, ..., x_n), h_h)$, jsou hledané konfidenční meze.

Tato metodika je uvedena podle Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 114-115.

Námět: Ověřte, za jakých podmínek nepůjde splnit požadovaný předpoklad: $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ existuje inverze $h(T,g)$ vůči g. {Jedna z možností: uvažujte výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ z alternativního rozdělení}

Příklad: Máme výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0, g\rangle$. Možnou statistikou pro odhad neznámého parametru g je: $T(x_1, x_2, ..., x_n) = max(x_1, x_2, ..., x_n)$. Taková statistika má pak rozdělení

$$f_{(n)}(t) = nf(t)F^{n-1}(t) = n\frac{1}{g}\left(\frac{t}{g}\right)^{n-1}, \quad F_{(n)}(t) = (F(t))^n = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow t \le 0 \\ \left(\frac{t}{g}\right)^n \Leftrightarrow 0 \le t \le g \\ 1 \Leftrightarrow t > g \end{cases}.$$

Funkci $h(T,g)$ můžeme zvolit např. $h(t,g) = \frac{t}{g}$. Potom

$$F_h(x) = P(h < x) = P\left(\frac{t}{g} < x\right) = P(t < gx) = F_n(gx) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow x \le 0 \\ x^n \Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \\ 1 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}.$$

Pokud je dáno $1-\alpha$ = koeficient spolehlivosti, **můžeme** α rozdělit do dvou shodných částí $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ (to pro jednoznačnost volby intervalu spolehlivosti, viz dále). Inverze funkce $h(t,g) = \frac{t}{g}$ bude $g = \frac{t}{h}$. Rovnost $P(h_d < h(T,g) < h_h) = 1-\alpha$ bude v tomto konkrétním případě vypadat $P\left(h_d < \frac{t}{g} < h_h\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}$. Toho lze dosáhnout **např.** volbou $P\left(\frac{t}{g} < h_d\right) = \frac{\alpha}{2}$ a $P\left(h_h < \frac{t}{g}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Po dosazení do vztahu $F_h(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow x \le 0 \\ x^n \Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \\ 1 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$, dostaneme: $(h_d)^n = \frac{\alpha}{2}$ a $(h_h)^n = 1-\frac{\alpha}{2}$. Řešení těchto vztahů bude $h_d = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}$ a $h_h = \sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Dále je $P\left(h_d < \frac{t}{g} < h_h\right) = P\left(\frac{t}{h_h} < g < \frac{t}{h_d}\right) = P\left(\frac{max(x_1,x_2,...,x_n)}{\sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}} < g < \frac{max(x_1,x_2,...,x_n)}{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$.

Poznámka: odhad $T(x_1,x_2,...,x_n) = max(x_1,x_2,...,x_n)$ není nestranným, je vychýlený.

Např. pro $\alpha = 0{,}05$ a $n = 10$ bude

$$P(1{,}002535\, max(x_1,x_2,...,x_n) < g < 1{,}4461256\, max(x_1,x_2,...,x_n)) = 0{,}95$$

a pro $\alpha = 0{,}05$ a $n = 100$ bude

$$P(1{,}0002532\, max(x_1,x_2,...,x_n) < g < 1{,}0375776\, max(x_1,x_2,...,x_n)) = 0{,}95 .$$

Námět: Pokuste se aplikovat daný postup pro nestranný odhad g, $\hat{g} = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}$.

Příklad: Máme výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ (známou). Možnou statistikou pro odhad neznámého parametru μ je průměr: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Taková statistika má pak opět normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$ a tedy s hustotou $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}}$. Funkci $h(\bar{x},\mu)$ můžeme zvolit např. $h(\bar{x},\mu) = \bar{x} - \mu$. Funkce $\bar{x} - \mu$ má hustotu $f_\xi(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}} e^{-\frac{h^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}}$ je tedy nezávislá (funkčně) na neznámém parametru μ. Pro koeficient spolehlivosti $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ použijeme obdobný rozklad jako v předchozím případě. Proto $1-\alpha = P(h_d < h(\bar{x},\mu) < h_h) = P\left(\frac{\sqrt{n}h_d}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}h_h}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_h}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_d}{\sigma}\right)$, kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce centrovaného a normovaného rozdělení $N(0{,}1)$. Rovnost $1-\alpha = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_h}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_d}{\sigma}\right)$ lze splnit více způsoby, běžný je $1-\frac{\alpha}{2} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_h}{\sigma}\right)$ a $\frac{\alpha}{2} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}h_d}{\sigma}\right)$. Jejím řešením je $h_h = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ a $h_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Např. pro $\alpha = 0{,}05$ je $\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}95996$ a $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -1{,}95996$. Řešením rovnice $1-\alpha = P(h_d < h(\bar{x},\mu) < h_h)$ je pak, včetně inverze funkce $h(\bar{x},\mu)$, $1-\alpha = P\left(\bar{x}+\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Konkrétně pro $\alpha = 0{,}05$ je $0.95 = P\left(\bar{x}-1{,}95996\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+1{,}95996\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Námět: stanovte takové intervalové odhady za podmínek tohoto příkladu pro $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.001$.

Příklad: Máme opět výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ (tentokrát neznámou). Možnou statistikou (opět) pro odhad neznámého parametru μ je průměr: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Možnou statistikou pro odhad neznámého parametru σ je výběrová směrodatná odchylka: $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$. Tentokrát se zvolí funkce $h(\bar{x},\mu) = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n}$. Její hodnoty nezávisí na neznámých parametrech μ, σ a $h(\bar{x},\mu)$ má Studentovo ***t-rozdělení*** s ***n-1*** stupni volnosti (dokažte) s hustotou $f(t,n-1)$ (námět: pokuste se odvodit její explicitní tvar {podíl normálně rozdělené náhodné proměnné a $\chi^2(n-1)$ náhodné proměnné}). Dále nalezneme řešení rovnice $\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(t,n-1)dt = 1-\alpha$ (námět: jak vypadá souvislost takového řešení s kvantily Studentova t-rozdělení s n-1 stupni volnosti). Potom: $1-\alpha = P\left(-t_\alpha < \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} < t_\alpha\right) = P\left(\bar{x}-t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ a tím dostaneme intervalový odhad střední hodnoty.

Srovnání obou příkladů:

	Dolní mez pro střední hodnotu	Horní mez pro střední hodnotu
σ známé	$\bar{x}+\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x}+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ neznámé	$\bar{x}-t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\bar{x}+t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}$

Protože platí $u_{1-\alpha/2} \overset{def}{=} \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \overset{def}{=} -u_{\alpha/2}$ (ověřte!), můžeme výše uvedenou tabulku přepsat:

	Dolní mez pro střední hodnotu	Horní mez pro střední hodnotu
σ známé	$\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ neznámé	$\bar{x}-t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\bar{x}+t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}$

Oba odhady se pak liší jen v tom, že při známém σ použijeme toto σ s „korekčním“ faktorem $u_{1-\alpha/2}$ a při neznámém σ použijeme jeho odhad $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$ s „korekčním“ faktorem t_α (námět: vyjádřete t_α pomocí kvantilů Studentova t-rozdělení s n-1 stupni volnosti).

Námět: srovnejte tabulku $u_{1-\alpha/2}$ a t_α pro různá n a různá α. Od jakého n se oba korekční faktory nebudou prakticky lišit (tj. od jakého n lze předpokládat znalost σ jeho náhradou za s. Pozor, taková aproximace je danou úvahou přijatelná jen a jen pro intervalový odhad střední hodnoty normálního rozdělení).

Příklad: Máme opět výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ (neznámou) a směrodatnou odchylkou σ (také neznámou). Možnou statistikou (opět) pro odhad neznámého parametru μ je průměr: $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. Možnou statistikou pro odhad neznámého parametru σ^2 je výběrový rozptyl: $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ (ten je nejlepším nestranným odhadem σ^2). Úkolem je sestrojit intervalový odhad pro parametr σ^2.

Veličina $(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ má $\chi^2(n-1)$ rozdělení (dokažte: jde vlastně o násobek součtu kvadrátů stejně a normálně rozdělených nezávislých náhodných proměnných). Proto platí: $1-\alpha=P\left(h_d<h\left(\sigma^2,s^2\right)<h_h\right)=P\left(h_d<(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}<h_h\right)=P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$,

kde $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ je $1-\alpha/2$ kvantil $\chi^2(n-1)$ rozdělení (s *n-1* stupni volnosti) a $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ je $\alpha/2$ kvantil téhož rozdělení.

Z toho, co bylo v tomto příkladu odvozeno, přímo plyne pro odhad parametru σ $1-\alpha=P\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}<\sigma<\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right)$ a to protože odmocnina z nezáporného čísla je rostoucí funkcí a tedy zachovává nerovnosti.

Námět: Odvoďte interval spolehlivosti pro neznámý parametr σ^2 u výběru z normálního rozdělení se známou střední hodnotou μ.

Námět: Odvoďte všechny výše uvedené vztahy pro obecnou dekompozici $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ a zvláště pro volby $(\alpha_1=0)\underline{\vee}(\alpha_2=0)$ *jednostranné (v pravděpodobnosti)* intervaly spolehlivosti). Zde se bude pracovat s kvantily $p_{1-\alpha_2}$, p_{α_1}.

Námět: Odvoďte všechny výše uvedené vztahy pro obecnou dekompozici $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ a pro volbu $1-\alpha=P\left(h-\varepsilon<h\left(\overline{x},\mu\right)<h+\varepsilon\right)$.

Námět: Odvoďte všechny výše uvedené vztahy pro obecnou dekompozici $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ a pro volbu $P\left(h^{-1}(T,h_d) < g < h^{-1}(T,h_h)\right) = 1-\alpha$, kde $h^{-1}(T,h_d) = k-\varepsilon$ a $h^{-1}(T,h_d) = k+\varepsilon$ (polohově symetrické intervaly spolehlivosti).

Námět: Odvoďte všechny výše uvedené vztahy pro obecnou dekompozici $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ a pro volbu $P\left(h^{-1}(T,h_d) < g < h^{-1}(T,h_h)\right) = 1-\alpha$, kde h_d, h_h jsou vybrány tak, aby $\left|h^{-1}(T,h_d) - h^{-1}(T,h_h)\right| \to min$ (nejkratší intervaly spolehlivosti).

Další (obecnější) metoda konstrukce intervalu spolehlivosti

Taková konstrukce je založena na **následujícím tvrzení**:
Mějme náhodný výběr z rozdělení $f(x;g); g \in \langle g_{min}, g_{max} \rangle$ o rozsahu n. Dále mějme statistiku $T(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pro ni zavedeme $F(t,g) = P(T \le t; g); G(t,g) = P(T \ge t; g)$. Pro funkci $F(t,g)$ předpokládejme splnění následujících podmínek:

1. ***$\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ je $F(t,g)$ spojitá klesající funkce g.***
2. ***$\lim_{g \to g_{min}} F(t,g) = 1$ a $\lim_{g \to g_{max}} F(t,g) = 0$.***

Pro daná čísla $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ označme funkce $g_d(t), g_h(t)$ definované vztahy $F(t, g_h(t)) = \alpha_1$ a $G(t, g_d(t)) = \alpha_2$.
Pak platí $P(g \ge g_h(T); g) \le \alpha_1$ a $P(g \le g_d(T); g) \le \alpha_2$. Pokud je takové rozdělení statistiky $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ spojité, pak v obou nerovnostech platí rovnost. Z uvedených formulací je zřejmé, že $g_h(T)$ je $100(1-\alpha_1)\%$ horní hranice spolehlivosti a obdobně $g_d(T)$ je $100(1-\alpha_2)\%$ dolní hranice spolehlivosti pro „neznámý" parametr g. Dvojice $g_d(T)$, $g_h(T)$ je tedy $100(1-\alpha_1-\alpha_2)\%$ intervalem spolehlivosti.

Tvrzení je převzato z: Machek J., Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 122-123, kde je i uveden důkaz, založený na následující skutečnosti:

Protože dle uvedeného předpokladu je $F(t,g)$ spojitou klesající funkcí v g je nerovnost $g \ge g_h(T)$ ekvivalentní nerovnosti $F(t,g) \le F(t, g_h(T))$. Ale pro $F(t, g_h(t))$ platí $F(t, g_h(t)) = \alpha_1$, proto je nerovnost $g \ge g_h(T)$ ekvivalentní i nerovnosti $F(t,g) \le \alpha_1$. Odtud $P(g \ge g_h(T); g) = P(F(t,g) \le \alpha_1; g)$. Protože $F(t,g) = P(T \le t; g)$ je i $P(g \ge g_h(T); g) = P(P(T \le t; g) \le \alpha_1; g) = \alpha_1$, neboť „pravděpodobnost pravděpodobnosti je pravděpodobnost". Shrnuto: $P(g \ge g_h(T); g) = \alpha_1$ (toto platí pro situaci kdy je rozdělení statistiky T spojité). Pro případ, kdy rozdělení statistiky T není spojité, dostaneme:
$P(g \ge g_h(T); g) = P(F(t,g) \le \alpha_1; g) = P(T \le sup\{t : F(t,g) \le \alpha_1\}; g) \le \alpha_1$

Námět: dokončete důkaz i pro druhou nerovnost.

Námět: modifikujte uvedené tvrzení pro situaci, kdy bude platit $\forall t \in T(\mathrm{X}^n)$ je $F(t,g)$ spojitá rostoucí funkce g, včetně důkazu (modifikujte pro tento případ i druhý předpoklad).

Námět: k čemu je třeba v původním tvrzení předpoklad $\lim_{g \to g_{min}} F(t,g)=1$ *a* $\lim_{g \to g_{max}} F(t,g)=0$, jak bude vypadat tento předpoklad pro modifikaci z předcházejícího námětu?

Příklad: Mějme náhodný výběr z alternativního rozdělení $x_1, x_2, ..., x_n$, kde $P(x_i=1)=p=P(A); P(x_i=0)=1-p=P(\overline{A})$, kde A je sledovaný jev a pozorovaná alternativní náhodná proměnná je indikátorem jeho realizace. Potom statistika $T(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i$ = počet realizací pozorovaného jevu během n nezávislých experimentů, má binomické rozdělení: $P(T=t)=\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}$, kde hledáme pro p jeho interval spolehlivosti. Funkce $F(t,p)$ má pak tvar $F(t,p)=P(T \le t;p)=\sum_{k=0}^{t}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ a funkce $G(t,p)$ má pak tvar $G(t,p)=P(T \ge t;p)=\sum_{k=t}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Dolní a horní mez pro zvolená čísla $0<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2<1$ nalezneme řešením rovnic:

$$\sum_{i=0}^{T}\binom{n}{i}p_h^i\left(1-p_h^i\right)^{n-i}=\alpha_1 \text{ a } \sum_{i=T}^{n}\binom{n}{i}p_d^i\left(1-p_d^i\right)^{n-i}=\alpha_2$$

Tyto dva vztahy je možné, v současnosti, řešit velmi jednoduše numericky (námět: navrhněte konkrétní metodu). Ve starší a klasické statistické literatuře jsou jejich řešení nalézána pomocí některých transformací na kvantily Fischer-Snedecorova F-rozdělení např.:

Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974. Str. 236.
Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 124-126.

Příklad: Mějme náhodný výběr z Poissonova rozdělení $x_1, x_2, ..., x_n$, kde $P(x_i=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Potom statistika $T(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i$ = počet realizací pozorovaných Poissonovských událostí v n nezávislých experimentech, má rozdělení $P(T=k)=e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$. Hledáme interval spolehlivosti pro neznámý parametr λ.

Dolní a horní mez pro zvolená čísla $0<\alpha_1,\alpha_2<1$ nalezneme řešením rovnic:

$$\sum_{i=0}^{T}e^{-n\lambda_h}\frac{(n\lambda_h)^i}{i!}=\alpha_1 \text{ a } \sum_{i=T}^{+\infty}e^{-n\lambda_d}\frac{(n\lambda_d)^i}{i!}=\alpha_2$$

Opět první z rovnic lze bez problémů pomocí současných prostředků řešit numericky, druhá zdánlivě ne. Ovšem jen zdánlivě, pokud si uvědomíme, že: $\sum_{i=T}^{+\infty}e^{-n\lambda_d}\frac{(n\lambda_d)^i}{i!}=1-\sum_{i=0}^{T-1}e^{-n\lambda_d}\frac{(n\lambda_d)^i}{i!}=\alpha_2$.

Znova, ve starší a klasické statistické literatuře jsou jejich řešení nalézána pomocí některých transformací (zde pomocí tvrzení o vyjádření binomických a Poissonovských pravděpodobností) na kvantily χ^2 rozdělení např.:

Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974. Str. 241.
Machek J.: Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK, str. 126-128.

Doporučená a zdrojová literatura:

Jiří Reif	Metody matematické statistiky, ZČU v Plzni 2004
Jaroslav Hátle, Jiří Likeš	Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
C. Radhakrishna Rao	Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, ACADEMIA, Praha 1978
Machek J.	Teorie odhadu, SPN Praha 1974, skripta MFFUK