

Elektrorevue
2005/29 -
17.5.2005

Analýza hlavních komponent v problematice separace naslepo

Obsah

Ing. Václav Eksler

eksler@feec.vutbr.cz

Ústav telekomunikací FEKT VUT v Brně

Problematikou separace zdrojů naslepo nebo také separace signálů naslepo se zabývá skupina metod, jejichž cílem je pomocí procesu separace obnovit původní zdrojové signály z jejich směsí, přičemž zdrojové signály ani prostředí, ve kterém došlo ke "smíchání", nejsou předem známy. Teoretickým rozбором i na příkladech zde ukážeme, jakou úlohu má statistická metoda analýzy hlavních komponent signálů směsí v procesu separace a jaký má vztah k metodám analýzy nezávislých komponent.

Obsah

1. Úvod do problematiky separace naslepo
 - 1.1. Předpoklady při zpracování metodami BSS
2. Analýza nezávislých komponent ICA
 - 2.1. BSS versus ICA
3. Analýza hlavních komponent PCA
 - 3.1. Rozklad pomocí singulárních čísel
4. Bělení jako metoda PCA
 - 4.1. Redukce počtu komponent
5. Názorné příklady analýz
6. Závěr
7. Literatura

1. Úvod do problematiky separace naslepo

Separace zdrojů či signálů naslepo BSS (z anglického *Blind Source/Signal Separation*) je skupina metod číslicového zpracování signálů, jejichž cílem je pomocí separačního procesu obnovit původní zdrojové signály z jejich směsí. Označením „zdroj“ se zde rozumí původní signál (tj. nezávislá komponenta), označení „slepý“ pochází z chabé - pokud vůbec nějaké - znalosti směšného prostředí a velice slabých předpokladů, které máme o zdrojových signálech. Někteří česky píšící autoři opisují BSS také názvem „slepá separace“ nebo „separace neurčených zdrojů“. Navíc separace naslepo není vlastně nic jiného než dekonvoluce dílčích komponent ze směsí, kterou získáme na výstupu daného systému, ačkoli exaktně řečeno, separace naslepo není totožná s dekonvolucí naslepo, viz diskuse např. v [2] nebo [3].

Celou situaci lze znázornit diagramem na obr. 1. V nejjednodušším případě je M signálů směsí $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ lineární kombinací N (přičemž obvykle $M \geq N$) neznámých, vzájemně statisticky nezávislých, centrovaných zdrojových signálů $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)]^T$, které jsou navíc znehodnoceny šumem a interferencemi. Symbol $()^T$ označuje operaci transpozice a k označuje index diskrétní časové posloupnosti, $k = 1, 2, \dots, K$, přičemž K je délka zpracovávaného signálu (např. délka rámce). Celou situaci můžeme zapsat následovně

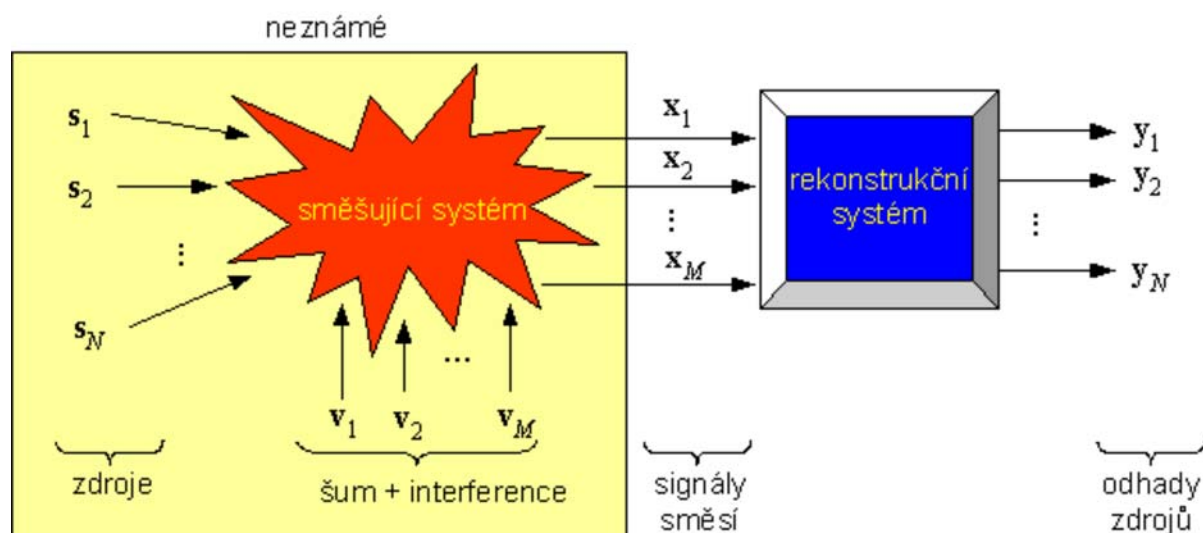
$$x_i(k) = \sum_{j=1}^M a_{ij} s_j(k) + v_i(k) \text{ nebo } \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (2)$$

kde $\mathbf{x}(k)$ je sloupcový vektor sensorových signálů směsí pozorovaných v každém diskrétním časovém okamžiku k , $\mathbf{s}(k)$ je obdobně sloupcový vektor zdrojových signálů, $\mathbf{v}(k) = [v_1(k), v_2(k), \dots, v_M(k)]^T$ je obdobně sloupcový vektor aditivních šumů, přičemž přítomnost aditivních šumů je zde obecně uvedena, nicméně ji nebudeme dále předpokládat. \mathbf{A} je pak neznámá směšná matice (*mixing matrix*) o rozměru $M \times N$ s prvky a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N$. Znamená to, že signály zaznamenané pomocí pole sensorů (např. mikrofonů) jsou váženou sumou primárních zdrojů.

Vektory směsí (ale i jakékoli jiné) si lze přestavit následovně a tak je budeme i dále značit:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = [\mathbf{x}(1) \quad \mathbf{x}(2) \quad \dots \quad \mathbf{x}(K)] = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(K) \\ x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \dots & x_M(K) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

přičemž x_i označuje i -tý zdrojový signál, $\mathbf{x}(k)$ označuje vzorky všech signálů směsí v časovém okamžiku k a podobně.

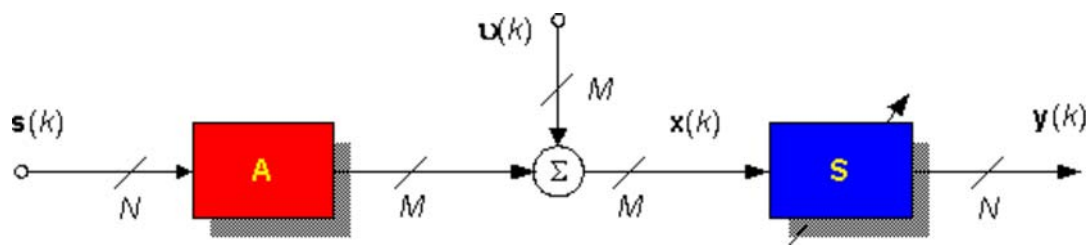


obr. 1 - Blokový diagram znázorňující problematiku separace zdrojů naslepo.

V obecném případě zdrojové signály a dokonce ani jejich počet neznáme, známe pouze vektory signálů ze sensorů $\mathbf{x}(k)$ a je tedy nezbytné vytvořit dopřednou nebo rekurentní neuronovou síť a odpovídající adaptivní algoritmus, které umožní odhad zdrojů, identifikaci směšné matice \mathbf{A} a/nebo separační matice \mathbf{S} . Separace zdrojů naslepo jakéhokoli vektoru $\mathbf{x}(k)$ je tedy získána nalezením separační matice \mathbf{S} o rozměru $N \times M$ a to takové, že výstupní signály $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_N(k)]^T$, definované vztahem

$$y_j(k) = \sum_{i=1}^M s_{ji} x_i(k) \text{ nebo } \mathbf{y}(k) = \mathbf{S}\mathbf{x}(k) \quad (3)$$

obsahují komponenty, které jsou co nejvíce nezávislé. Znamená to, že je nezbytné přizpůsobit váhy s_{ji} matice \mathbf{S} kombinací pozorování $x_i(k)$ tak, abychom získali odhady zdrojů signálů $y_j(k)$. Celý postup je blokově znázorněn na obr. 2.



obr. 2 - Obecné blokové schéma separace zdrojů naslepo reprezentované vektory a maticemi. N je počet zdrojových signálů $\mathbf{s}(k)$ a výstupních signálů $\mathbf{y}(k)$, M je počet signálů směsí $\mathbf{x}(k)$ a aditivních šumů $\mathbf{u}(k)$.

Obecnou definici BSS lze rovněž přiblížit pomocí následující analogie: signály šířící se neznámým prostředím (systémem) lze modelovat signály, které projdou číslicovými filtry. K obnovení zdrojových signálů je pak nutné nalézt filtry inverzní.

Shrňme, že hlavním úkolem BSS je tedy nalézt transformaci představovanou maticí \mathbf{S} . K jejímu nalezení lze s úspěchem použít metody lineární transformace ICA (viz [kap. 2](#)), které minimalizují statistickou závislost mezi výstupními signály $\mathbf{y}(k)$ a díky které lze za jistých předpokladů obnovit původní zdrojové signály. Předpokládá se přitom, že máme k dispozici stejný počet signálů směsí jako zdrojů, tedy $M = N$. Situace, kdy $M > N$ (více směsí než zdrojů), je řešena transformací PCA (viz [kap. 3](#)).

1.1. Předpoklady při zpracování metodami BSS

Pro lineární směšný a separační model uvedený v [kap. 1](#) platí následující předpoklady nutné k úspěšné separaci základními metodami BSS:

- počet senzorů je větší nebo roven počtu zdrojů, tedy $M \geq N$,
- zdrojové signály $\mathbf{s}(k)$ jsou v každém časovém okamžiku vzájemně nezávislé (společné entropie všech dvojic náhodných veličin jsou nulové, viz [\[8\]](#)),
- maximálně jeden zdrojový signál může být náhodný vektor s normálním rozdělením (z důvodu naprosto symetrického sdruženého rozdělení dvou gaussovských zdrojů, viz paralelogramy na [obr. 3](#)),
- přípustné jsou pouze signály bez aditivního sensorového šumu nebo degradované pouze nízkou úrovní aditivního šumu.

[obsah](#)

2. Analýza nezávislých komponent ICA

Předpokládejme transformaci $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k)$. Jak již bylo uvedeno, cílem ICA (analýzy nezávislých komponent, *independent component analysis*) - a tedy BSS - je nalezení inverzní matice ke směšné matici \mathbf{A} , tedy matice \mathbf{A}^{-1} , kterou jsme označili jako separační matici \mathbf{S} (viz vztah (3)). Jinými slovy se snažíme určit lineární transformaci $\mathbf{y}(k) = \mathbf{S}\mathbf{x}(k)$ tak, aby komponenty y_j byly nezávislé (tzn. maximalizuje se funkce, která vyjadřuje míru jejich nezávislosti).

Nalezení separační matice \mathbf{S} při dodržení předpokladů uvedených v [kap. 1.1](#) lze provést metodami ICA, avšak při dvou omezeních, která jsou základními vlastnostmi BSS (ICA). Prvním z nich je permutace indexů separovaných zdrojů $\mathbf{y}(k)$. Při separaci se totiž může stát (a většinou také stává), že u separovaných zdrojů dochází k záměně indexů, tzn., že separované zdroje nezískáme ve stejném pořadí jako zdroje původní. Druhým omezením je fakt, že se nám nikdy nepodaří obnovit separované signály s amplitudou signálů zdrojových.

Předpokládáme-li nezávislé zdroje a nesingulární směšnou matici \mathbf{A} , pak lze najít separační matici \mathbf{S} , která se od klasické inverze směšné matice \mathbf{A}^{-1} liší podle vztahu

$$\mathbf{S} = \mathbf{DPA}^{-1}, \quad (4)$$

kde \mathbf{P} je permutační matice, jejímž důsledkem je zmiňovaná permutace indexů separovaných zdrojů, a \mathbf{D} je nesingulární diagonální matice ovlivňující amplitudy separovaných výstupních signálů. Vztah mezi separovanými zdroji $\mathbf{y}(k)$ a původními zdroji $\mathbf{s}(k)$ je pak dán

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{DPs}(k) \quad (5)$$

Amplitudu původních zdrojů se nám nepodaří nikdy zcela přesně obnovit, naproti tomu fakt, zda dojde k permutaci indexů, čili výskytu permutační matice \mathbf{P} , zcela závisí na použitém separačním algoritmu. Nicméně v konečných aplikacích tato omezení nehrají velkou roli: konkrétní pořadí separovaných signálů požadujeme málokdy a více než správná amplituda signálů nás v praxi zajímá tvar a průběh signálů, které jsou separačními algoritmy úspěšně obnoveny.

2.1. BSS versus ICA

V současné literatuře se s problémem BSS můžeme setkat často pod označením ICA - analýza nezávislých komponent. Většina autorů tyto dva pojmy ztotožňuje a v principu odpovídá postupu uvedenému v úvodu [kap. 2](#), přičemž se předpokládá situace, kdy máme k dispozici stejný počet směrů $\mathbf{x}(k)$ jako zdrojů $\mathbf{s}(k)$, tedy $M = N$. Situace, kdy máme k dispozici větší počet směrů než zdrojů, nikdy ne naopak, tedy $M > N$, je řešena oblastí analýzy hlavních komponent PCA, jak bude ukázáno v [kap. 3](#).

Pojmy BSS a ICA však nejsou úplně stejné a ačkoli směsný model je obvykle v obou přístupech stejný, BSS je obecnější pojem. ICA je v podstatě jednou z metod BSS a to za předpokladu, že zdroje jsou nezávislé.

[obsah](#)

3. Analýza hlavních komponent PCA

Analýza hlavních komponent PCA (*Principal Component Analysis*) využívá podobný model jako ICA bez vektoru aditivních šumů popsaný rovnicí (1), je blízce příbuzná rozkladu pomocí singulárních čísel SVD (viz [kap. 3.1](#)) a podle oblasti využití bývá také označována jako Karhunen-Loevova transformace nebo Hotellingova transformace [1]. Cílem PCA je odvodit relativně malý počet dekorelovaných lineárních kombinací (hlavních komponent) množiny náhodných centrovaných proměnných, které nesou co nejvíce informací původních proměnných. Cílem, který je pro nás nejdůležitější, je přitom především určení lineárních kombinací proměnných, redukce počtu dimenzí (rozměru) a výběr nejužitečnějších proměnných. Jinak řečeno, hlavním účelem PCA je komprese dat a výběr příznaků (signálů nesoucích nejvíce užitečné informace).

Hlavní komponenty PCA jsou náhodné proměnné s maximálními odlišnostmi sestavené z lineárních směrů vstupních prvků. PCA je založena na statistikách druhého řádu, naproti tomu nezávislé komponenty ICA jsou náhodné proměnné s minimální entropií (viz [8]) sestavené z lineárních kombinací vstupních prvků. Entropie je normalizovaná rozdílností komponent, kdy nezáleží na absolutní velikosti. Podle teorie informací by takovéto proměnné měly být nezávislé do té míry, jak je to jen možné. ICA je hlavně založena na statistikách vyšších řádů a minimalizaci vzájemné informace.

PCA tak redukuje pouze statistickou závislost druhého řádu (tedy vlastně rozptyl), což je však pro separaci jednotlivých zdrojových signálů nedostačující, jak bude ukázáno dále. K úspěšné separaci je nutné redukovat i statistické závislosti vyšších řádů, což umožňuje právě ICA.

3.1. Rozklad pomocí singulárních čísel

Jak již bylo naznačeno, PCA může být řešena metodou rozkladu pomocí singulárních čísel SVD (*Singular Value Decomposition*, [7]) a to výběrem vlastních čísel kovarianční matice signálů směsí $\mathbf{x}(k)$. Můžeme dokonce říct, že PCA je technika výpočtu vlastních vektorů a vlastních čísel pro odhadnutou kovarianční matici

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T\} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T, \quad (6)$$

kde $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M]$ je ortogonální matice sloupcových vlastních vektorů a $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ je diagonální matice obsahující M vlastních čísel. Více v následující [kap. 4](#).

Dodejme, že kovarianční maticí rozumíme korelační matici signálů s nulovou střední hodnotou. Jak bude ukázáno dále, během výpočtu algoritmů ICA již předpokládáme zpracování signálů s nulovou střední hodnotou a matice kovarianční a korelační jsou tedy shodné.

Uveďme ještě základní charakteristiku SVD a tedy důvody, proč PCA využíváme. Mezi základní vlastnosti PCA totiž patří:

- váhový vektor \mathbf{v}_i maximalizuje kritérium $E\left\{\sum_{i=1}^M (x_i(k))^2\right\} = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_i^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}_i$,
- různé hlavní komponenty jsou vzájemně nekorelované,
- hlavní komponenty mají nulovou střední hodnotu, tj. $E\{x_i(k)\} = 0, \forall i$,
- rozptyl i -té hlavní komponenty je roven i -tému vlastnímu číslu kovarianční matice \mathbf{R}_{xx} , tj. $E\{(x_i(k))^2\} = \sigma_{x_i}^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}_i = \lambda_i$,
- hlavní komponenty jsou hierarchicky seřazeny v sestupném pořadí, tedy $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$.

[obsah](#)

4. Bělení jako metoda PCA

Analýza PCA je v podstatě krokem předzpracování v procesu separace. Použitím PCA dojde ke zlepšení konvergence separačního algoritmu a především ke zjednodušení celého algoritmu ICA. V této kapitole budeme označovat získané (senzorové) směsi $\mathbf{x}(k)$ a jejich upravené verze po procesu PCA, tedy signály výsledku předzpracování, jako sloupcový vektor $\tilde{\mathbf{x}}(k)$.

Proces předzpracování signálů před samotnou BSS nebo ICA nazýváme bělení (*whitening*), bývá také někdy označován jako předbělení (*prewhitening*), uzavření (*sphering*), normalizovaná prostorová dekorelace či Mahalanobisova transformace a jeho úkolem je najít tzv. bělicí matici \mathbf{B} . Hlavním úkolem procesu bělení je eliminovat redundanci (v situaci většího počtu senzorů než zdrojů), eliminovat aditivní šum atd. Bělení je taková transformace vstupních dat, kdy výstupní data jsou centrovaná, dekorelovaná a mají jednotkový rozptyl. Tyto vlastnosti má náhodný vektor, který má rozdělení bílého šumu, proto označení bělení. Bělení využívá rozkladu SVD (viz [kap. 3.1](#)) a je tak vlastně metodou PCA.

Náhodný vektor $\mathbf{x}(k)$ s nulovou střední hodnotou nazveme bílý, pokud jeho kovarianční matice je jednotková matice (*identity matrix*), tzn. $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T\} = \mathbf{I}_M$, přičemž kovarianční matice je definována jako

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T \quad (7)$$

a má rozměr $M \times M$. Během bělení jsou signály směsí $\mathbf{x}(k)$ předzpracovány pomocí transformace

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{B}\mathbf{x}(k), \quad (8)$$

kde $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ označuje vybělený vektor a \mathbf{B} je bělicí matice rozměru $N \times M$. Pokud $M > N$ (více senzorů než zdrojů), kde N je předem neznámé, redukuje \mathbf{B} rozměr datových vektorů z M na N , viz dále v [kap. 4.1](#). Tedy komponenty bělených vektorů jsou vzájemně nekorelované a mají jednotkový rozptyl, platí

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k)^T\} = E\{\mathbf{B}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T\mathbf{B}^T\} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_N. \quad (9)$$

Kovarianční matici $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ signálů směsí (protože je obvykle pozitivně definitní, platí $\mathbf{x}(k)^T\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}(k) > 0$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{x}(k)$) z rovnice (7) můžeme rozložit využitím SVD následovně

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_x\mathbf{\Lambda}_x\mathbf{V}_x^T = \mathbf{V}_x\mathbf{\Lambda}_x^{1/2}\mathbf{\Lambda}_x^{1/2}\mathbf{V}_x^T, \quad (10)$$

kde \mathbf{V}_x je ortogonální matice vlastních vektorů $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{\Lambda}_x = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ je diagonální matice s kladnými vlastními čísly seřazenými sestupně ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$) a $\mathbf{\Lambda}_x^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_M}\}$.

Hledaná matice bělení \mathbf{B} při splnění podmínky, že kovarianční matice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ je pozitivně definitní, je pak dána

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda}_x^{-1/2}\mathbf{V}_x^T = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}}\right\}\mathbf{V}_x^T \quad (11)$$

nebo také

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}_x^{-1/2}\mathbf{V}_x^T, \quad (12)$$

kde \mathbf{U} je libovolná ortogonální matice.

Pozn.: V [kap. 3.1](#) byla uvedena vlastnost, že hlavní komponenty mají nulovou střední hodnotu, neznamená to však, že střední hodnota separovaných signálů $\mathbf{y}(k)$ nemůže být odhadnuta. Po odhadu separační matice \mathbf{S} z centrovaných dat je možno dokončit odhad zdrojových signálů (separovaných výstupních signálů) přidáním vektoru středních hodnot získaných ze signálů směsí zpět k odhadům $\mathbf{y}(k)$.

4.1. Redukce počtu komponent

Během procesu bělení je užitečné navíc zredukovat počet vektorů $\mathbf{x}(k)$, tedy vybrat pouze tolik vektorů, kolik nezávislých komponent hledáme. S výhodou lze použít rozklad pomocí vlastních vektorů a čísel na podprostory signálů a šumů a jednoduše vyjmout ty, které jsou příliš malé a tedy odpovídají šumům.

Rozklad vlastních vektorů a čísel nyní můžeme rozšířit na podprostor signálů a šumů

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_x\mathbf{\Lambda}_x\mathbf{V}_x^T = [\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_v] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_v \end{bmatrix} [\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_v]^T, \quad (13)$$

kde \mathbf{V}_s obsahuje vlastní vektory užitečných signálů spojené s N hlavními vlastními čísly užitečných signálů $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N\}$ a \mathbf{V}_v obsahuje $(M-N)$ vlastních vektorů šumů spojených s vlastními čísly šumů $\mathbf{\Lambda}_v = \text{diag}\{\lambda_{N+1} \geq \lambda_{N+2} \geq \dots \geq \lambda_M\}$. K úspěšné dekompozici je nutné, aby $\lambda_N \gg$

λ^{N+1} .

Následkem rozkladu (13) je proto redukce šumu a bělicí matici tak získáme jako

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}_x^{-1/2}\mathbf{V}_x^T \quad (14)$$

Z předchozího vyplývá, že bělení redukuje počet parametrů, které je nutné odhadnout. Místo nutnosti odhadnout MN parametrů, které jsou prvky separační matice \mathbf{S} , nyní stačí odhadnout N^2 parametrů nové matice \mathbf{W} , která je dána např. výsledkem algoritmu ICA a označovat ji budeme jako adaptační matice (*adaptation matrix*). Platí, že separační matice je součinem matice adaptační a bělicí, tedy $\mathbf{S} = \mathbf{WB}$. Znovu připomínáme, že PCA je vlastně metodou předzpracování, která zjednodušuje výpočet algoritmů ICA, není však nutné ji použít.

Uvedená redukce parametrů daná bělením je pro případ datového prostoru čtyř směsí ($M = 4$) vzniklých smícháním dvou náhodných signálů s rovnoměrným rozdělením ($N = 2$) ukázána na [obr. 3](#) v [kap. 5](#).

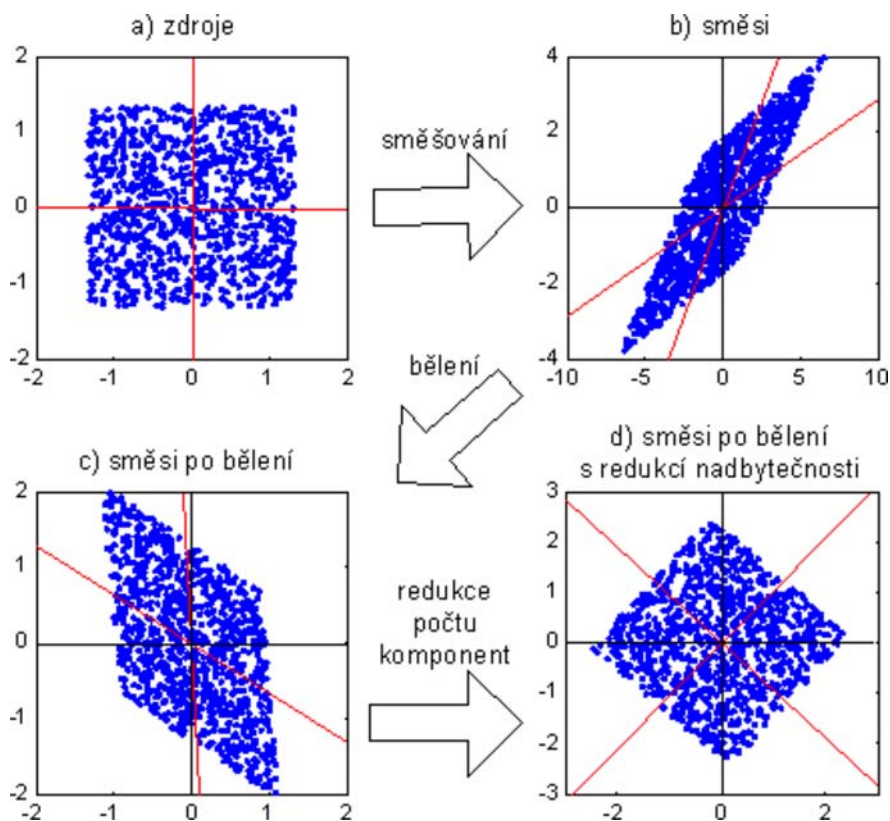
[obsah](#)

5. Názorné příklady analýz

Využití teoretických poznatků z předchozích kapitol nyní ukážeme při zpracování skutečných signálů. V prvním příkladu je uvedena situace redukce parametrů daná bělením (viz [kap. 4.1](#)) pro případ dvourozměrného datového prostoru (paralelogramu) čtyř směsí ($M = 4$) vzniklých smícháním dvou náhodných signálů ($N = 2$) s rovnoměrným rozdělením. Dva zdrojové signály z [obr. 3a](#)) byly smíchány

směšnou maticí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

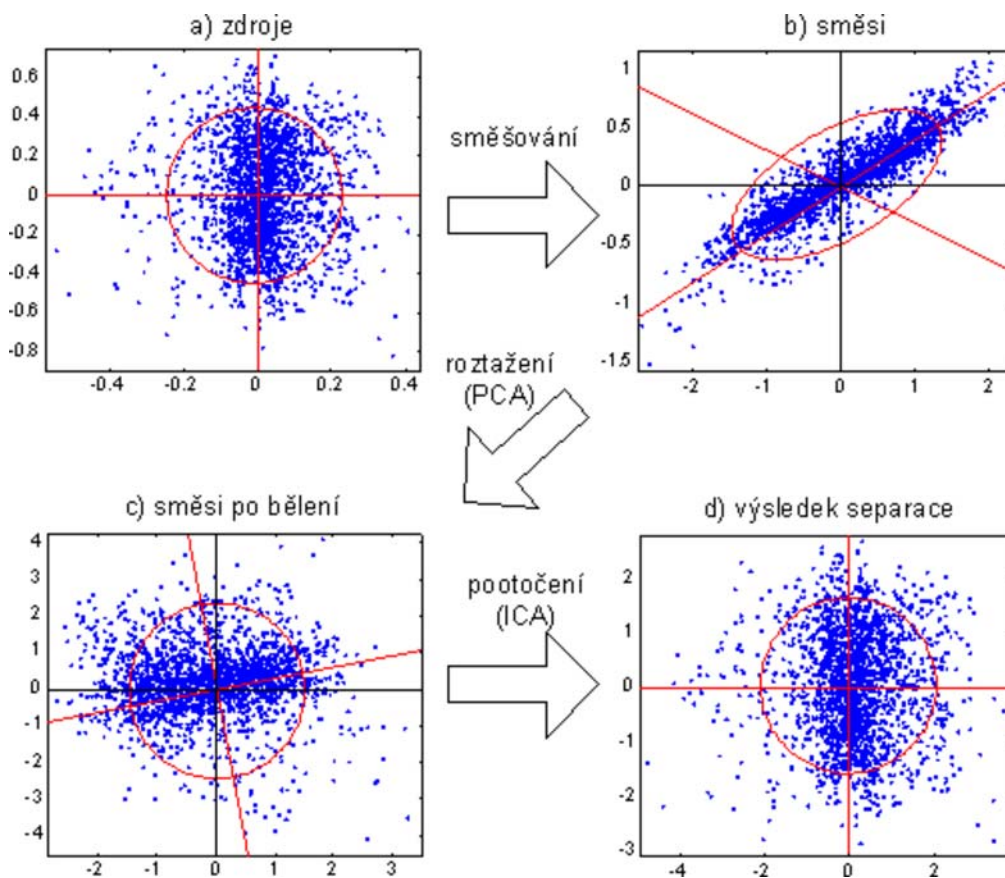
Na [obr. 3b](#)) je pak zobrazeno rozložení dvou signálů směsí, které nejsou nezávislé. Jejich závislost zredukujeme (i když ne zcela odstraníme) procesem bělení ([obr. 3c](#)) a dokončíme omezením počtu signálů z 4 na 2 ([obr. 3d](#)). Na něm je zřejmé, že rozložení datového prostoru upravených směsí se odlišuje od původního rozložení datového prostoru zdrojových signálů o pouhé pootočení. Vše co nyní zbývá určit v tomto dvourozměrném datovém prostoru je tak pouze úhel pootočení, což je řešeno problematikou ICA popsanou v [kap. 2](#).



obr. 3 - Ilustrace procesu bělení: zobrazen paralelogram dvou zdrojových (originálních) signálů, dvou směsí z celkových čtyř, dvou směsí ze čtyř po bělení a dvou směsí po redukci jejich počtu, na vodorovné ose je vždy vynesena amplituda prvního signálu, na svislé ose amplituda druhého.

V druhém příkladu je na obr. 4b) zobrazen dvourozměrný datový prostor kompozice dvou zdrojových řečových signálů z obr. 4a), přičemž pro směšnou matici platí $M = N = 2$ a její tvar je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Na obr. 4c) je znázorněn dvourozměrný datový prostor po provedení PCA metodou SVD z kap. 3.1. Srovnáním datového prostoru po PCA s datovým prostorem původních zdrojových signálů je zřejmé, že k opětovnému získání zdrojových signálů je opět nutné provést pootočení celého datového prostoru, které řeší metody ICA (viz výsledný paralelogram na obr. 4d)). Celý proces separace pak lze graficky znázornit jako roztažení (nazývané často jako „bělení“, což bylo diskutováno v kap. 4) a pootočení datového prostoru signálů směsí tak, jak je uvedeno na obr. 4.



obr. 4 - Paralelogram dvou zdrojových signálů, jejich směsí, směsí po předzpracování a ze směsí separovaných signálů, na vodorovné ose je vždy vynesena amplituda prvního signálu, na svislé ose amplituda druhého.

[obsah](#)

6. Závěr

Metody analýzy komponent mají široká uplatnění, např. v aplikacích s extrakcí příznaků řeči a obrázků, mozkové aktivity, identifikaci EEG a MEG, v telekomunikacích k detekci v systémech CDMA, audio separacích nebo také v analýze finančních dat. Zde jsme podrobně rozebrali analýzu hlavních komponent PCA, ukázali jsme, jak s její pomocí redukovat počet komponent signálů směsí a její vztah k analýze nezávislých komponent ICA. Autor má zkušenosti s procesy separace aplikovanými na audio signály a zájemcům o problémy separace si dovoluje doporučit např. literaturu uvedenou v [kap. 7](#).

Tento článek vznikl v rámci řešení grantového projektu FRVŠ 1500/G1/2005.

[obsah](#)

7. Literatura

[1] CICHOCKI, A., AMARI, S. *Adaptive Blind Signal and Image Processing*. John Wiley & Sons, Ltd., 2002. 554 pages. ISBN 0471-60791-6.

[2] HAYKIN, S. *Unsupervised Adaptive Filtering, Volume I: Blind Source Separation*. John Wiley & Sons, 2002.

- [3] HYVÄRINEN, A., KARHUNEN, J., OJA, E. *Independent component analysis*. John Wiley & Sons, Toronto, 481 pp. 2001. ISBN 0-471-40540-X.
- [4] HYVÄRINEN, A., OJA, E. Independent Component Analysis: Algorithms and Applications. *Neural Networks*, 13(4-5): 411- 430, 2000.
- [5] JUTTEN, C., HÉRAULT, J. Independent component analysis (INCA) versus principal component analysis. In LACOUME J., L. et al. *Signal Processing IV: Theories and Applications*, Elsevier, 1988.
- [6] LEE, T., W. *Independent Component Analysis: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1998. ISBN 0-7923-8261-7.
- [7] WEISSTEIN, E., W. *Singular Value Decomposition* From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Available at <<http://mathworld.wolfram.com/SingularValueDecomposition.html>>, [cit. 21. 3. 2005].
- [8] ŠEBESTA, V. *Teorie sdělování*. Skripta, VUT v Brně, 1998. ISBN 80-214-1247-X.

obsah