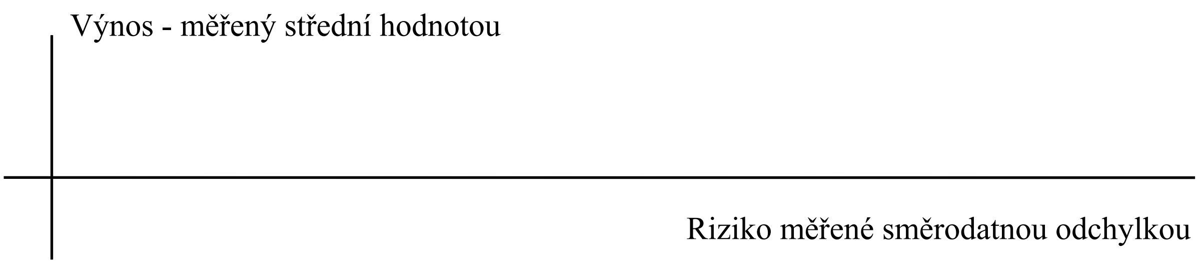
Investice a sázka na výnos

1. Teorie jednoho období

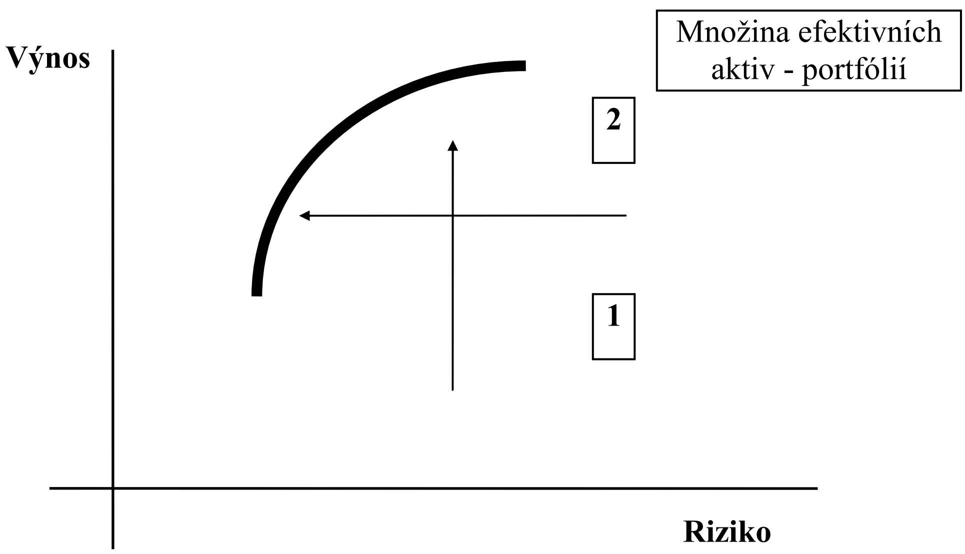
Na začátku období zakoupení si cenného papíru (obecně aktiva) na konci prodej. Inkasovat je možno výnos nebo ztrátu. Otázkou je do jakého „aktiva“ investovat. Vzniká problém jak odhadnout výnos a jak měřit riziko toho, že takový výnos bude skutečně realizován. Zkušenost ukazuje, že dobrým odhadem výnosu je odhad jeho střední hodnoty (v teorii přímo střední hodnota - expected value). Obdobně riziko je přijatelně měřeno odhadem směrodatné odchylky výnosu (opět v teorii směrodatná odchylka). S tím jsou spojeny práce H. Markowitze a W. Sharpeho (teorie investování, spec. portfolia - Nobelova cena za ekonomii).

Model:



\+ principy averze k riziku a maximalizace výnosu

1. Ze dvou aktiv se stejnou mírou rizika výběr výnosnějšího aktiva.
2. Ze dvou aktiv se stejnou výnosností výběr aktiva s menší mírou rizika.



2. Teorie opakovaného investování (sázení):

Základy J. L. Kelly: A New Interpretation of Information Rate, AT & T 1956.
Rozvoj T. Cover: [**Přehledný základ: Cover, Thomas: Elements of Information Theory, Wiley, New York 1991].**

Na začátku prvního období za *l* disponibilních likvidních prostředků se pořídí na základě některého (celý problém je v tom jakého) pravděpodobnostního rozdělení „směs“ investičních aktiv (cenných papírů, peněz, ...). Na konci tohoto období je prodána a za získané prostředky na základě stejného pravděpodobnostního rozdělení koupena nová aktiva. Celý postup je možno *n*-krát opakovat.

3. Model opakovaného sázení.

F - počáteční množství prostředků pro sázení
sF - vsazené prostředky
μ - množství peněz, jež dostanu za každou vsazenou korunu v případě výhry
p - pravděpodobnost výhry, (1-p) pravděpodobnost prohry (tj., že nevyhraji)

V případě výhry dostaneme po inkasování: $F - sF + \mu sF$
Pokud nevyhrajeme zůstane nám: $F - sF$

Označíme náhodnou proměnnou X, $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$

Potom lze pro zůstatek po hře psát:
$XF(1 - s + \mu s) + (1-X)F(1-s) = F(Xs\mu + 1 - s)$

a pro logaritmus zůstatku po hře:
$\Lambda(s) = \lg F + \lg(Xs\mu + 1 - s)$,
protože první člen součtu nezávisí na s je vhodnější a jednodušší použít kritérium:

$L(s) = \lg(Xs\mu + 1 - s)$

a pro střední hodnotu tohoto kritéria: $E(s) = p \lg(s\mu + 1 - s) + (1-p)\lg(1-s)$

Úlohou je **nalezení „nejvhodnější části“ vsazených prostředků,** tj. s.

Proto:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{p(\mu - 1)}{s\mu + 1 - s} - \frac{1 - p}{1 - s} = \frac{p(\mu - 1)(1 - s) - (1 - p)(s\mu + 1 - s)}{(1 - s)(s\mu + 1 - s)}$$

a

$$\frac{d^2E}{ds^2} = -\frac{p(\mu - 1)^2}{(s\mu + 1 - s)^2} - \frac{(1 - p)}{(1 - s)^2} < 0$$

Hledáme sedlový bod $\frac{dE}{ds} = 0$ řešením rovnice:

$$p(\mu - 1)(1 - s) - (1 - p)(s\mu + 1 - s) = 0$$

$$s = \frac{p\mu - 1}{\mu - 1}$$

Aby takové řešení mělo smysl, je nezbytné: $0 \leq s \leq 1$,

první nerovnost vede na podmínku: $\mu > \frac{1}{p}$

a druhá na $p < 1$ (to je splněno automaticky).

Výnos z výhry musí být větší než převrácená hodnota pravděpodobnosti výhry.
Pokud označíme:

$$s^* = \frac{p\mu - 1}{\mu - 1} \quad \text{optimální sázenou část}$$

dostaneme $E(s^*) = p \lg(p\mu) + (1-p)\lg\left[\frac{\mu}{\mu-1}(1-p)\right] =$

$$\lg\frac{\mu(\mu-1)^p}{\mu - 1} + p\lg(p) + (1-p)\lg(1-p) =$$

$$= \lg\frac{\mu(\mu-1)^p}{\mu-1} - H(p)$$

Pro $\mu = 2$ pak dostáváme $\mathbf{E(s^*) = 1 - H(p)}$

Pokud volíme strategii log - optimálního sázení máme po vyhrané hře:

$$F(1 + p\mu - 1) = Fp\mu$$

a po prohrané hře

$$F \frac{\mu(1-p)}{\mu - 1}.$$

Střední hodnota takového zůstatku je:

$$p(Fp\mu + (1-p)F\left(\frac{\mu(1-p)}{\mu - 1}\right) = \mu F(p^2 + \frac{(1-p)^2}{\mu - 1}) =$$

a to pro $\mu=2$ je $2F(p^2 + (1-p)^2)$ pro to platí:

$$2F(p^2 + (1-p)^2) = 2F(1 - H_{1-p}(p))$$

Podmínka „efektivity sázení“:
střední hodnota zůstatku po sázce by měla být vyšší než počáteční disponibilní prostředky, proto:

$$\mu F(p^2 + \frac{(1-p)^2}{\mu - 1}) > F \Leftrightarrow$$

$(\mu - 1)p^2 + (1-p)^2 > \frac{\mu - 1}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad (\mu p - 1)^2 > 0$ a to je pro „rozumné hodnoty“ μ a p splněno

Rozšíření pro „n“ opakovaných sázek

$$F_n = F \prod_{i=1}^{n} (X_i s\mu + (1-s))$$

proto $E_n(s) = n[p\lg(s\mu+1-s)+(1-p)\lg(1-s)]$ a odtud: $s^* = \frac{p\mu - 1}{\mu - 1}$

pro nezávislé a stejně rozdělené výsledky sázek.